MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
ZÜRICH

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
G. HERGLOTZ O. PERRON W. SÜSS
W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. JUNI 1947)

BERLIN UND GÖTTINGEN
SPRINGER-VERLAG
1947

Math.
Z.

Preis RM 12.—

51. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Wittich, Prof. Dr. H., Göttingen, Bunsenstraße, Mathematisches Institut: Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion . . 1

Köthe, Prof. Dr. G., Mainz, Mathematisches Seminar der Universität: . . . Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes 17

Maruhn, Prof. D. K., Jena, Frauenhoferstraße 1, Mathematisches Institut: Über einige Klassen nichtlinearer Randwertaufgaben der Potentialtheorie 36

Lorentz, Dr. G. G., Tübingen, Am Lustanuer Tor 2: Beweis des Gaußschen Integralsatzes 61

Sprague, R., Berlin-Charlottenburg 2, Schillerstr. 15: Bemerkungen über eine spezielle Abelsche Gruppe 82

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion[1]).

Von

H. Wittich in Göttingen.

Nach dem Randstellensatz[2]) ist die Erzeugende einer RIEMANNschen Fläche vom Grenzpunkttypus mit p logarithmischen Windungspunkten eine gebrochene Funktion, die mindestens vom Mitteltypus der Ordnung $p|2$ ist. Nach R. NEVANLINNA, L. AHLFORS und G. ELFVING weiß man, daß die Erzeugende einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche mit $p \geqq 2$ logarithmischen und nur endlich vielen algebraischen Windungspunkten genau vom Mitteltypus der Ordnung $p|2$ ist. Um den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung der zugeordneten Erzeugenden zu untersuchen, muß man also von vornherein unendlich viele algebraische Windungspunkte betrachten. Die von E. ULLRICH eingeführten Flächen mit $p \geqq 1$ periodischen Enden[3]) haben diese Eigenschaft. Sie weisen nämlich neben p logarithmischen Windungspunkten unendlich viele algebraische Windungspunkte auf, und zwar in einer gewissen periodischen Anordnung. Hier soll nun an einem speziellen Beispiel gezeigt werden, daß durch Einschaltung unendlich vieler algebraischer Windungspunkte unter Umständen eine Wachstumserhöhung der zugehörigen Erzeugenden erzwungen werden kann.

1. Für die Konstruktion der Beispielfunktion benötigen wir einige Eigenschaften der ganzen Funktionen $g_1(\zeta) = \frac{1}{3}(e^{2\zeta} + 2e^{-\zeta})$ und $g_2(\zeta) = \frac{1}{3}(2e^{\zeta} + e^{-2\zeta})$, die in diesem Abschnitt kurz zusammengestellt werden. $g_1(\zeta)$ nimmt die Werte $a_2 = \varepsilon^2$, $a_3 = \varepsilon^3$, $a_4 = \varepsilon^4$, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$ doppelt an, und zwar in den a_j-Stellen $\zeta_{a_2} = \frac{2\pi i}{3} + 2m\pi i$, $\zeta_{a_3} = 2m\pi i$, $\zeta_{a_4} = \frac{4\pi i}{3} +$

---

[1]) Vortrag auf der Arbeitstagung der D. M. V. im Herbst 1941 in Jena. Ein Teil der Rechnungen wurde in der vorliegenden Darstellung unterdrückt. Eine ausführliche Darstellung erscheint in einer anderen Arbeit, die u. a. E. ULLRICHS Flächen mit endlich vielen periodischen Enden behandelt.

Für die hier vorkommenden Begriffe und Sätze vergleiche man: R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

[2]) E. ULLRICH, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 46 (1936).

[3]) E. ULLRICH, Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. 1, Nr. 9 (1936).

$+2m\pi i$; $a_1 = \infty$ wird ausgelassen. Wegen $N(r, \infty) = 0$ und $T(r, g_1) = N(r, \infty) + m(r, \infty)$ folgt

$$T(r, g_1) = m(r, \infty). \tag{1}$$

Für die Schmiegungsfunktion $m(r, \infty)$ gewinnt man leicht die Abschätzung

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |g_1(\xi)| \, d\varphi \leqq \frac{3r}{\pi} (1 + \eta_1(r)) \tag{2}$$

mit $\xi = r e^{i\varphi}$ und $\lim_{r \to \infty} \eta_1(r) = 0$. Die Anzahlfunktion $N(r, 0) = N\left(r, \frac{1}{g_1(\xi)}\right)$ lautet

$$N(r, 0) = \frac{3r}{\pi} (1 + \eta_2(r)), \quad \lim_{r \to \infty} \eta_2(r) = 0. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $\frac{3r}{\pi} (1 + \eta_2(r)) \leqq T(r, g_1) \leqq \frac{3r}{\pi} (1 + \eta_1(r))$, also

$$T(r, g_1) = \frac{3r}{\pi} (1 + \eta(r)), \quad \lim_{r \to \infty} \eta(r) = 0. \tag{4}$$

Die Funktion $g_1(\xi)$ hat also die Wachstumsordnung $\lambda = 1$ und ist wegen $T(r, g_1) : r^\lambda = \frac{3}{\pi} (1 + \eta(r)) \to \frac{3}{\pi}$ bei $r \to \infty$ vom Mitteltypus der Ordnung 1.

Wegen $N(r, \infty) = 0$, $N_1(r, a_j) = \frac{r}{\pi} (1 + \eta(r))$, $j = 2, 3, 4$, gilt für die Defekte und Indizes

$$\delta(\infty) = 1, \ \vartheta(a_j) = \tfrac{1}{3}, \ j = 2, 3, 4. \tag{5}$$

Die Summe der Defekte und Indizes erreicht also ihren Höchstwert 2.

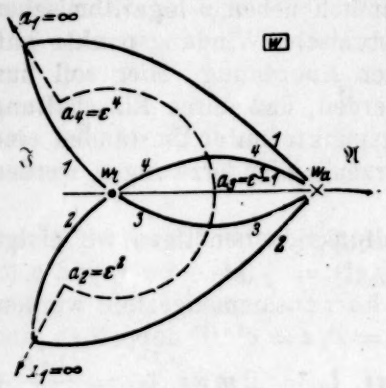

Fig. 1.

Die Riemannsche Fläche, die von $g_1(\xi)$ als Bild der in $\xi = \infty$ punktierten ξ-Ebene erzeugt wird, ist von E. Ullrich[4]) betrachtet worden. Sie läßt sich in bequemer Weise durch den Streckenkomplex beschreiben. Als Zerschneidungskurve c wählen wir: Halbstrahl $\arg g_1 = -\frac{2\pi}{3}$, der von $g_1 = a_1$ ausgeht, Kreisbogen $|g_1| = 1$, $|\arg g_1| \leqq \frac{2\pi}{3}$ und Halbstrahl $\arg g_1 = \frac{2\pi}{3}$, ausgehend von $g_1 = a_4$. Die Kurve c geht durch alle Grundpunkte $g_1 = a_j$ und zerlegt die g_1-Ebene in ein Innengebiet $\mathfrak{J}$ und ein Außengebiet $\mathfrak{A}$. Unter Benutzung der eingezeichneten Kurvenstücke (j) ergibt sich der in Fig. 2a dargestellte Streckenkomplex $\mathfrak{S}_1$, der über die Struktur der von $g_1(\xi)$ erzeugten Fläche einen vollständigen Überblick gibt. Fig. 2b

[4]) Vgl. E. Ullrich, l. c. Anm. 3).

Fig. 2a.

Fig. 2b.

Fig. 3.

zeigt den zu der Funktion $g_1(\zeta)$ gehörigen Streckenkomplex $\mathfrak{S}_1$.

2. Aus $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ wird der in Fig. 3 angegebene Streckenkomplex $\mathfrak{S}$ zusammengesetzt. Bei gegebenen Grundpunkten a_j und gegebener Zerschneidungskurve $\mathfrak{c}$ wird durch $(\mathfrak{S}, a_j, \mathfrak{c})$ nach G. Elfving[5]) eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche bestimmt, die vom Grenzpunkttypus[6]) ist. Es gibt also eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Funktion $z = z(w)$, die die über der w-Ebene ausgebreitete Fläche $\mathfrak{W}$ schlicht und konform (von algebraischen Windungspunkten abgesehen) in das Gebiet $|z| < \infty$ abbildet. Ihre in $|z| < \infty$ eindeutige Umkehrfunktion $w = g(z)$ ist eine gebrochene Funktion. Unter a_j und $\mathfrak{c}$ die in 1. eingeführten Zeichen verstanden, wird also durch die Angabe $(\mathfrak{S}, a_j, \mathfrak{c})$ eine bis auf eine Ähnlichkeitstransformation in z bestimmte ganze transzendente Funktion $w = g(z)$ erklärt. Diese Funktion $w = g(z)$ soll im folgenden untersucht werden, und zwar hinsichtlich ihrer Wachstumsordnung.

Die die Funktion $w = g(z)$ definierenden Angaben $\mathfrak{S}, a_j$ und $\mathfrak{c}$ lehren, daß die zu $w = g(z)$ gehörige Fläche zwei logarithmische Windungspunkte über $w = \infty$ aufweist. Nach dem Randstellensatz von Ahlfors-Denjoy folgt mithin für ihre Wachstumsordnung λ die Abschätzung $\lambda \geqq 1$. Es soll nun gezeigt werden, daß bei der vorliegenden Beispielfunktion die Ordnung λ den Wert $\lambda = 1{,}0486\ldots$ besitzt, also > 1 ist. Dieses Ergebnis überrascht etwas, wenn man die durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ dargestellten Flächen allein auf ihre Verzweigungseigenschaften hin vergleicht. Von diesem Gesichtspunkt aus wird man die betrachteten Flächen als nicht wesentlich verschieden ansehen. Die Ordnungen der entsprechenden ganzen Funktionen $g(z)$ und $g_1(\zeta)$ bzw. $g_2(\zeta)$ sind aber wesentlich verschieden. Die Defekte und Indizes ändern sich dagegen beim Übergang von $g_1(\zeta)$ oder $g_2(\zeta)$ zu $w = g(z)$ nicht.

3. Zum Beweis der in 2. aufgestellten Behauptung werden einige Hilfsabbildungen benötigt; sie werden an der durch $(\mathfrak{S}_1, a_j, \mathfrak{c})$ bestimmten einfach zusammenhängenden unendlich vielblättrigen Riemannschen

---

[5]) G. Elfving, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. fenn. N. s. Nr. 3 (1934).

[6]) Jede Fläche mit endlich vielen periodischen Enden gehört zum Grenzpunkttypus. Vgl. H. Wittich, Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Zeitschr. 45 (1939).

Fläche $\mathfrak{W}_1$ entwickelt. Die Fläche $\mathfrak{W}_2$ läßt sich in ganz entsprechender Weise behandeln. Die Struktur der Fläche $\mathfrak{W}_1$ geht aus Fig. 4 hervor, die durch stetige Abbildung von $\mathfrak{W}_1$ in eine schlichte Ebene gewonnen ist. Den Kurven C und C^* entsprechen auf $\mathfrak{W}_1$ Flächenkurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$, die je eine Umgebung $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ der beiden logarithmischen Windungspunkte über $g_1 = \infty$ bestimmen. Wir dürfen annehmen, daß sowohl $\mathfrak{C}$ als auch $\mathfrak{C}^*$ den Kreis $|g_1| = t$ zur Spur haben; dabei setzen wir hier nur $t > 1$ voraus und stellen erst später weitere Bedingungen an t. $\mathfrak{D}$ wird durch die Funktion

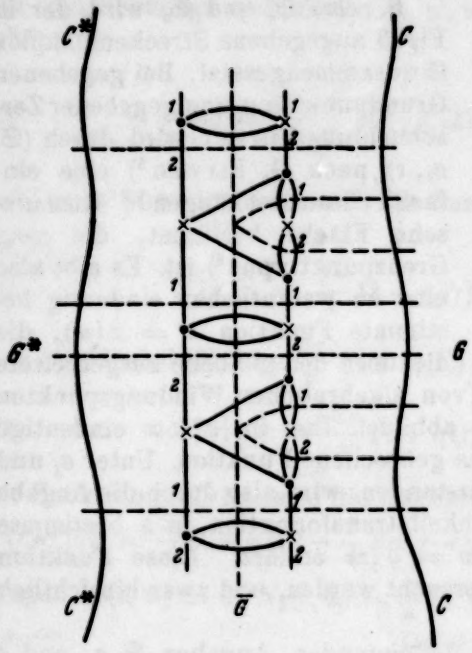

Fig. 4.

$$h = \frac{1}{\pi} \log g_1 \tag{6}$$

in die Halbebene $\Re h \geqq \frac{1}{\pi} \log t$ und $\mathfrak{D}^*$ durch

$$h^* = \frac{e^{i\pi}}{\pi} \log g_1 \tag{6*}$$

in die Halbebene $\Re h^* \leqq \frac{e^{i\pi}}{\pi} \log t = -\frac{1}{\pi} \log t$ schlicht und konform abgebildet. Dabei verbleibt in (6) und (6*) noch die Möglichkeit einer passenden Zweigbestimmung des Logarithmus. In der ζ-Ebene entsprechen gemäß $g_1 = g_1(\zeta)$ $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ Kurven, die wir mit C_ζ und C_ζ^* bezeichnen. Den Geraden $\Re h = \frac{1}{\pi} \log t = d$ bzw. $\Re h^* = -d$ entsprechen also durch $h \to g_1 \to \zeta$ bzw. $h^* \to g_1 \to \zeta$ die Kurven C_ζ bzw. C_ζ^*. Durch $g_1(\zeta) = \frac{1}{8}(e^{3\zeta} + 2e^{-\zeta})$ und (6) gewinnen wir eine Beziehung zwischen den Punkten $h = d + i\varrho$ und den Punkten ξ auf C_ζ. Mit $\zeta = \xi + i\eta$ folgt für ζ auf C_ζ

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \log t - \frac{1}{2} \log |1 + 2e^{-3\zeta}| + \frac{1}{2} \log 3, \\ \eta &= \frac{\pi}{2} \varrho - \frac{1}{2} \arg (1 + 2e^{-3\zeta}). \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei wurde die bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmte Funktion $\zeta = \zeta(g_1)$ so normiert, daß der durch $h \to g_1$ dem Punkt $h = d$ entsprechende Flächenpunkt g_1 einen Bildpunkt ζ auf C_ζ mit kleinstem $|\Im \zeta|$ ergibt. Entsprechend findet man dann für die Punkte $\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$ auf C_ζ^*

$$\begin{aligned} \xi^* &= -\log t + \log |1 + \tfrac{1}{2} e^{3\zeta}| + \log \tfrac{3}{4}, \\ \eta^* &= \pi\varrho + \arg (1 + \tfrac{1}{2} e^{3\zeta}). \end{aligned} \tag{7*}$$

Bei gegebenem $\varepsilon > 0$, etwa $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, gibt es offenbar eine Zahl $K_\varepsilon > 0$ derart, daß für alle ζ mit $|\Re\zeta| \geqq K_\varepsilon$ die Funktionen $\log|1+2e^{-3\zeta}|, \ldots$ in (7) und (7*) dem Betrage nach kleiner als ε bleiben. Aus (7) und (7*) ersieht man aber, daß $|\Re\zeta| \geqq K_\varepsilon$ ist, falls nur $t \geqq \bar{t}_\varepsilon$ gilt, $\bar{t}_\varepsilon > 1$ hinreichend groß. Für solche t-Werte weicht also die Kurve C_ζ bzw. C_ζ^* in ihrem ganzen Verlaufe höchstens um ε von der Geraden $\xi = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log 3$ bzw. $\xi^* = -\log t + \log\frac{1}{3}$ ab. Durch passende Wahl von $\bar{t}_\varepsilon$ erreicht man noch, daß C_ζ vollständig in $\Re\zeta > 0$, C_ζ^* in $\Re\zeta < 0$ liegt. Für diese $t \geqq \bar{t}_\varepsilon$ liefert die für die Herleitung von (7) getroffene Zweigbestimmung von $\zeta = \zeta(g_1)$ als Bild von d: $\zeta = \frac{1}{2}\log 3\, t + \\ + <\varepsilon> + i<\varepsilon>$, also einen Bildpunkt mit kleinstem $|\Im\zeta|$.

ζ ist eindeutig und regulär analytisch in $h = d + i\varrho$ für alle endlichen ϱ. Differentiation nach h liefert $\frac{d\zeta}{dh} = \frac{\pi}{2}\frac{1+2e^{-3\zeta}}{1-e^{-3\zeta}}$, also

$$(8) \qquad \frac{d\xi}{d\varrho} = \Phi_1(\zeta), \qquad \frac{d\eta}{d\varrho} = \frac{\pi}{2}(1+\Phi_2(\zeta)).$$

Dabei gilt $|\Phi_j(\zeta)| < \varepsilon$, wenn nur $t \geqq t'_\varepsilon$, also sicher für $t \geqq t_\varepsilon = \mathrm{Max}(\bar{t}_\varepsilon, t'_\varepsilon)$. In der Parameterdarstellung $\xi = \xi(\varrho)$, $\eta = \eta(\varrho)$ für C_ζ sind die Funktionen $\xi(\varrho)$, $\eta(\varrho)$ eindeutig und stetig differenzierbar. Wegen (8) gilt $\left|\frac{d\xi}{d\varrho}\right| < \varepsilon$, $\frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon) < \frac{d\eta}{d\varrho} < \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)$; $\eta = \eta(\varrho)$ ist also umkehrbar eindeutig.

Durch $\zeta_1 = \frac{2}{\pi}\zeta$ geht das von $\Re\zeta = 0$ und C_ζ begrenzte Streifengebiet S_ζ über in ein Streifengebiet S_{ζ_1}. Die Parameterdarstellung von C_{ζ_1}, des ζ_1-Bildes von C_ζ', sei $\xi_1 = \xi_1(\varrho)$, $\eta_1 = \eta_1(\varrho)$. Für $\xi_1(\varrho)$, $\eta_1(\varrho)$ können wir ansetzen: $\xi_1 = p + f(\varrho)$, $\eta_1 = \varrho + g(\varrho)$ mit $p = \frac{1}{\pi}\log 3\, t$. Die Funktionen $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ sind in ϱ stetig differenzierbar und haben nebst ihren Ableitungen nach ϱ Beträge $< \varepsilon$.

In der $z = x + iy$-Ebene betrachten wir nun den Streifen $S_z: 0 \leqq x \leqq b, -\infty < y < \infty$ und stellen uns folgende Abbildungsaufgabe: S_z soll quasikonform so auf den Streifen S_{ζ_1} abgebildet werden, daß folgende Randzuordnung gilt: $\zeta_1 = z$ auf $\Re z = 0$ und $\zeta_1 = p + \\ + f(y) + i(y + g(y))$ auf $\Re z = b$.

Dazu bilden wir durch einen ersten Schritt den Streifen S_z auf den Streifen $S^z{}_1: 0 \leqq \Re z_1 = x_1 \leqq b, -\infty < \Im z_1 = y_1 < \infty$ so ab, daß auf $\Re z = 0$ $z_1 = z$ und auf $\Re z = b$ $z_1 = b + i(y + g(y))$ gilt. Durch $x_1 = x$, $y_1 = y + g(y)\cdot\frac{x}{b}$ wird die Strecke $0 \leqq \Re z \leqq b$, $\Im z = y$ auf die Verbindungslinie der Punkte $z_1 = iy$ und $z_1 = b + i(y + g(y))$ abgebildet. Jedem Punkt auf S_z entspricht offenbar genau ein Punkt auf S_{z_1} und umgekehrt. Weiter ist die Abbildung stetig differenzierbar, wie man aus $\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{g(y)}{b}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y} = 1 + \frac{g'(y)\,x}{b}$

erkennt. Aus $E+G = 1+\frac{g^2}{b^2}+\left(1+g'(y)\frac{x}{b}\right)^2$, $\sqrt{EG-F^2} = 1+g'(y)\frac{x}{b} \geqq 1-\varepsilon$ folgt $2K = \frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}} \leqq c_1 = c_1(b,\varepsilon)$. Bei gegebenem $b>0$ und $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ ist $c_1(b,\varepsilon)$ eine feste endliche positive Konstante. Mithin gilt für den Dilatationsquotienten $D_{z|z_1} = D_{z_1|z} = K+\sqrt{K^2-1} < 2K \leqq c_1$. Die angegebene Abbildung $z \longleftrightarrow z_1$ leistet also die gewünschte quasikonforme Abbildung von S_z auf S_{z_1}.

In einem zweiten Schritt wird S_{z_1} auf S_{ζ_1} quasikonform abgebildet mit der Randvorschrift: $\zeta_1 = z_1$ auf $\Re z_1 = 0$, $\zeta_1 = p+f(y_1)+iy_1$ auf $\Re\zeta_1 = b$. Dazu setzen wir $\xi_1 = (p+f(y_1))\frac{x_1}{b}$, $\eta_1 = y_1$ und erhalten eine eineindeutige und stetig differenzierbare Abbildung zwischen S_{z_1} und S_{ζ_1}. Aus $E = \left(\frac{p+f}{b}\right)^2$, $G = 1+\left(f'(y_1)\cdot\frac{x_1}{b}\right)^2$, $\sqrt{EG-F^2} = (p+f(y_1))\frac{1}{b}$ folgt $D_{\zeta_1|z_1} = D_{z_1|\zeta_1} \leqq c_2 = c_2(p,b,\varepsilon)$; $c_2(p,b,\varepsilon)$ ist bei gegebenem b, ε und $p>\varepsilon$ eine feste endliche positive Konstante. Durch Zusammensetzen der einzelnen Abbildungsfunktionen entsteht eine Funktion $\zeta = \zeta(z)$, die eine quasikonforme Abbildung zwischen den Gebieten S_ζ und S_z vermittelt. Es gilt $D_{z|\zeta} = D_{\zeta|z} \leqq D_{z|z_1}\cdot D_{z_1|\zeta} \leqq c_1 c_2 = c_3(p,b,\varepsilon) < \infty$. Die Punkte $\zeta = i\eta$ gehen dabei in Punkte $z = \frac{2}{\pi}i\eta$ über und die Punkte $\zeta = \xi(\varrho)+i\eta(\varrho)$ auf C_ζ in die Punkte $z = b+iy = b+i\varrho$. Die groben Abschätzungen der Dilatationsquotienten reichen, wie wir sehen werden, für unsere Zwecke völlig aus; wir brauchen nämlich nur die Tatsache, daß die auftretenden Dilatationsquotienten beschränkt sind.

In völlig analoger Weise wird das durch $\Re\zeta = 0$ und C_ζ^* berandete Streifengebiet S_{ζ^*} quasikonform auf ein Streifengebiet $S_{z^*}: -b^* \leqq \Re z^* = x^* \leqq 0$, $-\infty < \Im z^* = y^* < \infty$ der z^*-Ebene durch $\zeta^* = \zeta^*(z^*)$ abgebildet mit $D_{z^*|\zeta^*} = D_{\zeta^*|z^*} \leqq c_3^* < \infty$. Dabei gehen die Punkte $\zeta^* = i\eta^*$ in $z^* = i\frac{\eta^*}{\pi}$ und die Punkte $\zeta^* = \xi^*(\varrho)+i\eta^*(\varrho)$ in $z^* = -b^*+iy^* = -b^*+i\varrho$ über [7]).

4. Durch $(\mathfrak{S}, \mathfrak{c}, a_j)$ ist die Funktion $z = z(w)$ bis auf eine Ähnlichkeitstransformation in z eindeutig bestimmt. Diese Transformation

[7]) Setzt man

$$\mathfrak{z} = \begin{cases} h \\ z \end{cases} \text{ und } \mathfrak{z} = \begin{cases} 2z^* \\ 2h^* \end{cases} \text{ und wählt } b = b^* = d,$$

so erhält man damit eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der ζ- und $\mathfrak{z}$-Ebene. Fassen wir Fig. 4 als konformes Bild der Fläche $\mathfrak{W}_1$ auf, also als ζ-Ebene, so geht C bzw. C^* über in die Gerade $\Re\mathfrak{z} = d$ bzw. $\Re\mathfrak{z} = -2d$. Die Abbildung $\zeta \to \mathfrak{z}$ ist in G und G^* konform, in $\bar{G}$ quasikonform. Die Herstellung dieser Abbildung bedeutet natürlich, wenn man keinen anderen Zweck damit verfolgt, einen Umweg, weil man ja mit $g_1 = g_1(\zeta)$ die Zuordnung zwischen der ζ-Ebene und der Fläche $\mathfrak{W}_1$ völlig beherrscht.

wird so gewählt, daß das Kernviereck den Punkt $z = 0$ enthält und $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = 1$ ist. Dann ist also durch $(\mathfrak{S}, \mathfrak{c}; a_j)$ eine wohlbestimmte ganze Funktion $w = g(z)$ definiert. Durch zwei Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ auf $\mathfrak{W}$, die beide den Kreis $|w| = t > 1$ zur Spur haben und sich beide unendlich oft um $w = \infty$ herumwinden, werden die beiden über $w = \infty$ gelegenen logarithmischen Windungspunkte aus der Fläche herausgetrennt. Den Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ entsprechen die z-Bilder C und C^*. Sie zerlegen die z-Ebene in die Gebiete G, G^* und $\overline{G}$, wobei den Gebieten G und G^* durch $z \longleftrightarrow w = g(z)$ die durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ bestimmten Umgebungen der logarithmischen Windungspunkte entsprechen (Fig. 5). Durch (6) bzw. (6*) wird G bzw. G^* in die Halbebene $H: \Re h \geqq d$ bzw. $H^*: \Re h^* \leqq -d$ schlicht und konform abgebildet. Dabei normieren wir nun die Abbildungsfunktionen so, daß $h((w(z_0)) = d$ und $h^*(w(z_0^*)) = -d$ gilt [8]). Die Bilder von $h = d + i\varrho$ bzw. $h^* = -d + i\varrho$ seien z_ϱ bzw. z_ϱ^*. Zu einer beliebig gegebenen Zahl $r_0 > 0$ läßt sich stets eine natürliche Zahl n_0 so bestimmen, daß alle Punkte $z_{\pm\varrho}$, $z_{\pm\varrho}^*$ außerhalb des Kreises $|z| = r_0$ liegen, falls nur $\varrho \geqq n_0$ ist. Außerhalb $|z| = r_0$ ziehen wir in G zwei Querschnitte γ_2 und γ_1, die bzw. z_{n_0} mit $z_{n_0}^*$, z_{-n_0} mit $z_{-n_0}^*$ verbinden. Sie zerlegen $\overline{G}$ in die Gebiete G_1, G_2 und K, wobei K sicher das Kernviereck enthält, falls nur r_0 hinreichend groß ist. Den Gebieten G_1 und G_2 entsprechen mittels $w = g(z)$ Flächenstücke $\mathfrak{W}_1'$ und $\mathfrak{W}_2'$, die Teilflächen von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ sind. Diese Tatsache erlaubt es nun, zusammen mit den in 3. angegebenen Hilfsmitteln, die Gebiete G_1 und G_2 in einfachere Gebiete abzubilden. Die Umkehrfunktion von $g_j = g_j(\zeta_j)$ bildet $\mathfrak{W}_j'$ schlicht

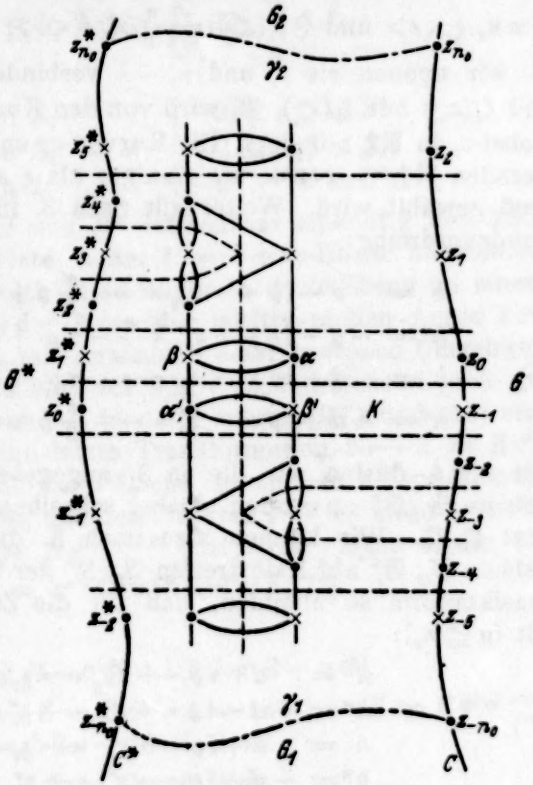

Fig. 5.

[8]) z_0 bzw. z_0^* ist Bild eines Flächenpunktes über $w = t$ und liegt in dem gleichen Fundamentalgebiet wie der Eckpunkt α bzw. α' des Kernvierecks.

und bis auf algebraische Windungspunkte konform in ein Gebiet $\mathfrak{G}_j'$ der ζ_j-Ebene ab, $j = 1, 2$. Die Gebiete $\mathfrak{G}_j'$ sind bis auf Parallelverschiebungen um Vielfache von $2\pi i$ eindeutig bestimmt. Bei passender Wahl von t wird $\mathfrak{G}_j'$ durch die Gerade $\Re\zeta_j = 0$ in zwei Gebiete $\mathfrak{G}_j$ und $\mathfrak{G}_j^*$ zerlegt, wobei $\mathfrak{G}_j$ in $\Re\zeta_j > 0$ liegt. Die Abbildungsfunktionen werden durch die folgenden Festsetzungen normiert: $\Im\zeta_1(z_{-n_0}) = -\frac{\pi}{2}n_0 + <\varepsilon>$ und $\Im\zeta_2(z_{n_0}) = \pi n_0 + <\varepsilon>$; dann folgt $\Im\zeta_1(z^*_{-n_0}) = -\pi n_0 + <\varepsilon>$ und $\Im\zeta_2(z^*_{n_0}) = \frac{\pi}{2}n_0 + <\varepsilon>$. Die Bilder von γ_1 und γ_2 — wir nennen sie $\bar\gamma_1$ und $\bar\gamma_2$ — verbinden also $\zeta_1(z_{-n_0})$ mit $\zeta_1(z^*_{-n_0})$ und $\zeta_2(z_{n_0})$ mit $\zeta_2(z^*_{n_0})$. $\mathfrak{G}_j'$ wird von den Kurven c_j, γ_j und c_j^* berandet, wobei c_j in $\Re\zeta_j > 0$ liegt. Die Kurven c_j und c_j^* weichen gemäß 3. von Geraden $\Re\zeta_j = \text{const.}$ um weniger als ε ab, wenn nur t hinreichend groß gewählt wird. Weiter gilt nach 3. für alle $\varrho \geqq n_0$ die folgende Randzuordnung:

$$
\begin{aligned}
h &= d - i\varrho \longleftrightarrow z_{-\varrho} \longleftrightarrow -\frac{\pi}{2}\varrho + \langle\varepsilon\rangle = \Im\zeta_1 \text{ auf } c_1,\\
h^* &= -d - i\varrho \longleftrightarrow z^*_{-\varrho} \longleftrightarrow -\pi\varrho + \langle\varepsilon\rangle = \Im\zeta_1 \text{ auf } c_1^*,\\
h &= d + i\varrho \longleftrightarrow z_{\varrho} \longleftrightarrow \pi\varrho + \langle\varepsilon\rangle = \Im\zeta_2 \text{ auf } c_2,\\
h^* &= -d + i\varrho \longleftrightarrow z^*_{\varrho} \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}\varrho + \langle\varepsilon\rangle = \Im\zeta_2 \text{ auf } c_2^*.
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

Für $t \geqq t_\varepsilon$ dürfen wir die in 3. angegebene Hilfsabbildung auf die Gebiete $\mathfrak{G}_j, \mathfrak{G}_j^*$ anwenden. Dabei schreiben wir in $\mathfrak{G}_1^*$, $\mathfrak{G}_2^*$ statt ζ_1, ζ_2 jetzt ζ_1^*, ζ_2^*. Wir können also nach 3. durch $\zeta_j \longleftrightarrow \mathfrak{z}_j$, $\zeta_j^* \longleftrightarrow \mathfrak{z}_j^*$ die Gebiete $\mathfrak{G}_j, \mathfrak{G}_j^*$ auf Halbstreifen S_j, S_j^* der Breite d in der $\mathfrak{z}_j, \mathfrak{z}_j^*$-Ebene quasikonform so abbilden, daß für die Zuordnung der Randpunkte gilt ($\varrho \geqq n_0$):

$$
\begin{aligned}
h &= d - i\varrho \longleftrightarrow z_{-\varrho} \longleftrightarrow \mathfrak{z}_1 = d - i\varrho,\\
h^* &= -d - i\varrho \longleftrightarrow z^*_{-\varrho} \longleftrightarrow \mathfrak{z}_1^* = -d - i\varrho,\\
h &= d + i\varrho \longleftrightarrow z_{\varrho} \longleftrightarrow \mathfrak{z}_2 = d + i\varrho,\\
h^* &= -d + i\varrho \longleftrightarrow z^*_{\varrho} \longleftrightarrow \mathfrak{z}_2^* = -d + i\varrho.
\end{aligned}
\tag{9''}
$$

Dabei entsprechen nun den Punkten $\zeta_1 = \zeta_1^* = -i\eta$ bzw. $\zeta_2 = \zeta_2^* = i\eta$, $\eta > 0$, die Bildpunkte

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}_1(-i\eta) &= -i\frac{2}{\pi}\eta,\\
\mathfrak{z}_1^*(-i\eta) &= -i\frac{1}{\pi}\eta,\\
\mathfrak{z}_2(i\eta) &= i\frac{1}{\pi}\eta,\\
\mathfrak{z}_2^*(i\eta) &= i\frac{2}{\pi}\eta.
\end{aligned}
\tag{9'''}
$$

Durch erlaubte Abänderung der Querschnitte γ_1, γ_2 oder $\bar\gamma_1, S_2$ kann man offensichtlich erreichen, daß die Halbstreifen S_j, S_j^* aus denjenigen

Punkten bestehen, deren Real- und Imaginärteile durch die folgenden Bedingungen verknüpft sind:

$$S_1: 0 \leqq \Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1} \leqq d,\ \Im\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1} \leqq \frac{n_0}{2d}(\Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1} - 3d),$$

$$S_1^*: -d \leqq \Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1}^* \leqq 0,\ \Im\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1}^* \leqq \frac{n_0}{4d}(\Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_1}^* - 3d),$$

$$S_2: 0 \leqq \Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2} \leqq d,\ \Im\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2} \geqq \frac{n_0}{4d}(\Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2} + 3d),$$

$$S_2^*: -d \leqq \Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2}^* \leqq 0,\ \Im\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2}^* \geqq \frac{n_0}{2d}(\Re\, \mathfrak{z}_{\vartheta_2}^* + 3d).$$

Durch

$$(10) \qquad t = \begin{cases} -i\,\mathfrak{z}_{\vartheta_1},\ \mathfrak{z}_{\vartheta_1} \text{ in } S_1 \\ -i\,\mathfrak{z}_{\vartheta_2},\ \mathfrak{z}_{\vartheta_2} \text{ in } S_2 \\ -ih,\ h \text{ in } H \end{cases} \qquad t = \begin{cases} -2i\,\mathfrak{z}_{\vartheta_1}^*,\ \mathfrak{z}_{\vartheta_1}^* \text{ in } S_1^* \\ -2i\,\mathfrak{z}_{\vartheta_2}^*,\ \mathfrak{z}_{\vartheta_2}^* \text{ in } S_2^* \\ -2ih^*\ \ h^* \text{ in } H^* \end{cases}$$

werden die Gebiete S_j, S_j^*, H und H^* umkehrbar eindeutig und konform auf entsprechende Gebiete in der $t = \sigma + i\tau$-Ebene abgebildet. Wegen (9″) und (9‴) fügen sich diese Bilder in der t-Ebene zu einem Gebiet zusammen, das aus der längs der positiv reellen Achse aufgeschlitzten t-Ebene besteht, mit Ausnahme einer gewissen Umgebung von $t = 0$. Auf dem Schlitz sind für $\sigma \geqq \sigma_0$, σ_0 hinreichend groß gewählt, die Punkte $t = 4\sigma$ und $t = \sigma e^{2\pi i}$ wegen (9‴) und (10) einander zugeordnet. Durch eine letzte Transformation $t \longleftrightarrow Z = Re^{i\Phi}$ wird das angegebene Gebiet der t-Ebene so auf ein entsprechendes Gebiet der Z-Ebene abgebildet, daß den Punkten $t = 4\sigma$ und $t = \sigma e^{2\pi i}$ derselbe Punkt $Z = Re^{i\Phi} = Re^{i(\Phi+2\pi)}$ entspricht. Dazu setzen wir

$$(11) \qquad t = Z^{a+ib} = e^{a\log R - b\Phi}\, e^{i(b\log R + a\Phi)}$$

oder

$$(11') \qquad \log t = (a\log R - b\Phi) + i(b\log R + a\Phi).$$

Aus der Forderung $t = 4\sigma \longleftrightarrow Z = Re^{i\Phi}$, $t = \sigma e^{2\pi i} \longleftrightarrow Z = Re^{i(\Phi+2\pi)}$ erhalten wir $\log 4 - 2\pi i = b\,2\pi - a\,2\pi i$, d. h.

$$a = 1,\ b = (\log 4)/2\pi.$$

Man überzeugt sich sofort davon, daß die Funktion

$$(12) \qquad t = Z^{1+i\frac{\log 4}{2\pi}}$$

die gewünschte Abbildung leistet.

Durch Zusammensetzung der bisher benutzten Hilfsabbildungen erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen $|s| \geqq r^*$ und der Z-Ebene, aus der eine Umgebung U^* des Punktes $Z = 0$ auszuschließen ist[9]). Diese Zuordnung ist in den Gebieten G und G^* konform und

[9]) Durch die Abbildung $s \longleftrightarrow t$ entsteht aus $|s| = r^*$, r^* so gewählt, daß $|s| < r^*$ das Gebiet K einschließlich der Querschnitte γ_j vollständig enthält, eine Kurve, die die Ausnahmeumgebung von $t = 0$ bestimmt.

in G_i stetig differenzierbar mit beschränktem Dilatationsquotienten $D_{z|z} = D_{\bar{z}|\bar{z}} \leqq D < \infty$.

5. Nach Konstruktion von $z = z(Z)$ entspricht jedem Kreis $|Z| = R \geqq R_0$[10]) eine einfache geschlossene Kurve Γ_R, die $z = 0$ umschlingt.

Dem Kreisring $R_1 \leqq |Z| \leqq R_2$, $R_1 \geqq R_0$, entspricht in der z-Ebene ein Ringgebiet, berandet von den Kurven Γ_{R_1} und Γ_{R_2}; dabei trennt Γ_{R_1} die Kurve Γ_{R_2} von $z = 0$ und Γ_{R_2} die Kurve Γ_{R_1} von $z = \infty$. Die Funktion $\tilde{z} = \tilde{z}(z)$ bilde das Ringgebiet schlicht und konform auf das Rechteck $0 \leqq \Re\tilde{z} \leqq M(R_1, R_2)$, $0 \leqq \Im\tilde{z} \leqq 2\pi$ ab. Wir setzen noch $\tilde{Z} = \log Z$. Aus dem Kreis $|Z| = R, R_1 \leqq R \leqq R_2$, entsteht in der $\tilde{z}$-Ebene eine Kurve K_R, deren Länge offenbar $\geqq 2\pi$ ist. Mithin gilt:

$$2\pi \leqq \int_{K_R} |d\tilde{z}| = \int \left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right| |d\tilde{Z}|\ ^{11}); \tag{13}$$

dabei ist die Abbildung $\tilde{z} \longleftrightarrow \tilde{Z}$ in gewissen Gebieten $\mathfrak{Q}_k$ der Z-Ebene konform, in gewissen anderen Gebieten $\mathfrak{Q}_q$ stetig differenzierbar mit beschränktem Dilatationsquotienten $D_{\tilde{z}|\tilde{z}} = D_{\bar{\tilde{z}}|\tilde{z}} \leqq D < \infty$. Den Gebieten $\mathfrak{Q}_q$ entsprechen in der t-Ebene zwei Gebiete, die aus dem Streifengebiet $-d \leqq \Im t \leqq 2d$ entstehen, wenn man alle Punkte mit $|t| < e^{a \log R_0} e^{-b\Phi}$ fortläßt. Bei passender Wahl von R_0 zerfällt das Streifengebiet in der t-Ebene in zwei Teilgebiete. Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (13)

$$\begin{aligned}
4\pi^2 &\leqq \left\{\sum_{\mathfrak{Q}_k}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right||d\tilde{Z}| + \sum_{\mathfrak{Q}_q}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right||d\tilde{Z}|\right\}^2 \\
&= \left\{\sum_{\mathfrak{Q}_k}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right||d\tilde{Z}| + \sqrt{D}\sum_{\mathfrak{Q}_q}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|\frac{1}{\sqrt{D}}|d\tilde{Z}|\right\}^2 \\
&\leqq \left[\sum_{\mathfrak{Q}_k}\int|d\tilde{Z}| + \sum_{\mathfrak{Q}_q} D\int|d\tilde{Z}|\right]\cdot\left[\sum_{\mathfrak{Q}_k}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|^2|d\tilde{Z}| + \sum_{\mathfrak{Q}_q}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|^2\frac{1}{D}|d\tilde{Z}|\right] \\
&\leqq \left[2\pi + \sum_{\mathfrak{Q}_q}(D-1)\int|d\tilde{Z}|\right]\cdot\left[\sum_{\mathfrak{Q}_k}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|^2|d\tilde{Z}| + \sum_{\mathfrak{Q}_q}\int\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|^2\frac{1}{D}|d\tilde{Z}|\right].
\end{aligned}$$

Wegen $\left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right|^2 \leqq D\frac{\boxed{d\tilde{z}}}{\boxed{d\tilde{Z}}}$ (bei $D = 1$, also bei konformer Abbildung, gilt das Gleichheitszeichen) folgt mit $L(R) = \sum_{\mathfrak{Q}_q}(D-1)\int|d\tilde{Z}|$ weiter:

$$\frac{4\pi^2}{2\pi + L(R)} \leqq \int_{\Phi_0}^{\Phi_0+2\pi}\frac{\boxed{d\tilde{z}}}{\boxed{d\tilde{Z}}}\,d\Phi. \tag{13'}$$

---

[10]) R_0 so groß gewählt, daß $|Z| = R_0$ die Ausnahmeumgebung U^* umschließt.

[11]) Integrationswege und -grenzen werden hier und im folgenden vielfach weggelassen.

Integration nach $\log R$ ergibt

$$(14)\quad 4\pi^2 \int_{\log R_1}^{\log R_2} \frac{d\log R}{2\pi + L(R)} \leqq \int_{\log R_1}^{\log R_2} \int_{\Phi_0}^{\Phi_0+2\pi} \left|\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{Z}}\right| d\log R\, d\Phi = 2\pi M(R_1, R_2).$$

oder

$$\int_{\log R_1}^{\log R_2} \frac{d\log R}{1 + \frac{L(R)}{2\pi}} \leqq M(R_1, R_2).$$

Wir schätzen nun die Größe $\frac{1}{2\pi} L(R)$ ab. Dazu betrachten wir die Bilder von $\mathfrak{Q}_q$ in der t- bzw. $\log t = u + iv$-Ebene, $0 \leqq v < 2\pi$. Den Halbstrahlen ($\Re t > 0$, $\Im t = 2d$), ($\Re t < 0$, $\Im t = 2d$), ($\Re t < 0$, $\Im t = -d$), ($\Re t > 0$, $\Im t = -d$), entsprechen der Reihe nach die Kurven: $\mathfrak{c}_1 : v = \arcsin 2de^{-u}$, $\mathfrak{c}_2 : v = \pi - \arcsin 2de^{-u}$, $\mathfrak{c}_3 : v = \pi + \arcsin de^{-u}$, $\mathfrak{c}_4 : v = 2\pi - \arcsin de^{-u}$. Als Bilder von $\mathfrak{Q}_q$ in der $\log t$-Ebene erscheinen die Gebiete, die durch die Geraden $au + bv = (a^2 + b^2) \log R_0$ und $au + bv = (a^2 + b^2) \log R$ aus den vier Streifengebieten, berandet durch ($v = 0, \mathfrak{c}_1$), ($\mathfrak{c}_2, v = \pi$), ($v = \pi, \mathfrak{c}_3$), ($\mathfrak{c}_4, v = 2\pi$), herausgeschnitten werden. Dem Kreis $|Z| = R \geqq R_0$ entspricht in der $\log t$-Ebene die Strecke zwischen den Punkten $\log R^{1/a}$ und $\log \frac{R^{1/a}}{4} + 2\pi i$, wobei $\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$ gesetzt wurde. Den Kurvenstücken in den $\mathfrak{Q}_q$, über welche die Integrale $\int |d\tilde{Z}|$ zu erstrecken sind, entsprechen in der $\log t$-Ebene Strecken, deren Gesamtlänge sicher kleiner ist als $43d \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\log 4}{2\pi}\right)^2}\, R^{-1/a}$, für alle $R \geqq R_0$, wenn man R_0 hinreichend groß wählt. Wegen

$$\left|\frac{d\tilde{Z}}{d\log t}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\log 4}{2\pi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ folgt nun sofort}$$

$$L(R) = \sum_{\mathfrak{Q}_q} (D-1) \int |d\tilde{Z}| = (D-1) \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sum \int |d\log t| < (D-1)\, 43\, d\, R^{-1/a}$$

oder

$$(15)\quad \frac{L(R)}{2\pi} < \frac{D-1}{2\pi} \cdot 43d \cdot R^{-1/a} = k_1 R^{-1/a}$$

und damit aus (14)

$$(14')\quad \int_{\log R_1}^{\log R_2} \frac{d\log R}{1 + k_1 R^{-1/a}} \leqq M(R_1, R_2).$$

Nach Auswertung des Integrals erhält man

$$(16)\quad \log \frac{R_2}{R_1} - \frac{k_2}{R_1^{1/a}} \leqq M(R_1, R_2) \text{ mit } k_2 = \alpha k_1.$$

Bedeutet R_0 das Maximum von k_1^a und von der bisher benutzten Zahl R_0, so gilt (16) für alle R_1, R_2, die $R_2 > R_1 \geqq R_0$ genügen. In ähnlicher Weise leiten wir nun eine Abschätzung für $M(R_1, R_2)$ in umgekehrter Richtung ab.

Der Strecke $\tilde{x} = \text{const.}$ im Rechteck $0 \leqq \tilde{x} \leqq M, 0 \leqq \tilde{y} \leqq 2\pi$ entspricht in der Z-Ebene eine Kurve, die mindestens die Länge 2π hat. Mithin gilt

$$2\pi \leqq \int |d\tilde{Z}| = \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right| d\tilde{y} \tag{17}$$

oder wieder nach der Schwarzschen Ungleichung

$$4\pi^2 \leqq \int_0^{2\pi} d\tilde{y} \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{y} = 2\pi \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{y},$$

also

$$2\pi \leqq \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{y}. \tag{17'}$$

Integration nach $\tilde{x}$ liefert aus (17')

$$2\pi \int_0^M d\tilde{x} \leqq \int_0^M \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

oder

$$2\pi M(R_1, R_2) \leqq \sum_{\tilde{\Omega}_k} \int\int \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y} + \sum_{\tilde{\Omega}_q} \int\int \left|\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{z}}\right|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

$$\leqq \sum_{\tilde{\Omega}_k} \int\int \boxed{d\tilde{Z}} + \sum_{\tilde{\Omega}_q} \int\int D \cdot \boxed{d\tilde{Z}},$$

wobei $\tilde{\Omega}_k, \tilde{\Omega}_q$ die $\tilde{z}$-Bilder von Ω_k, Ω_q bedeuten. Aus der letzten Beziehung folgt nun sofort

$$2\pi M(R_1, R_2) < 2\pi \log \frac{R_2}{R_1} + \sum_{\tilde{\Omega}_q} (D-1) \int\int \boxed{d\tilde{Z}}. \tag{18}$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (18) läßt sich leicht abschätzen. Dazu gehen wir wieder in die $\log t$-Ebene zurück. Wegen $u(R, \Phi) \geqq \log \frac{R_1^{1/a}}{4}$ für alle R, die $R \geqq R_1$ genügen, gilt für den Inhalt l der Bildgebiete von Ω_q in der $\log t$-Ebene:

$$l < 4 \int_{\log \frac{R_1^{1/a}}{4}}^{\infty} \arcsin 2d e^{-u}\, du < \frac{32 \cdot d \cdot 4}{3} R_1^{-1/a} = \frac{128\, d}{3} R_1^{-1/a}.$$

Wegen $\left|\frac{d\log Z}{d\log t}\right|^2 = \frac{1}{|a+ib|^2} = \frac{\boxed{d\tilde{Z}}}{\boxed{d\log t}}$ erhalten wir

$$\sum_{\mathfrak{D}_2}(D-1)\int\int \boxed{d\tilde{Z}} = \frac{D-1}{|a+ib|^2}\, l < \frac{D-1}{|a+ib|^2}\cdot\frac{128\,d}{3}R_1^{-1/a} = k_3 R_1^{-1/a}.$$

Diese Abschätzung gilt für alle $R_1 \geqq R_0$, wobei R_0 wieder passend, d. h. hinreichend groß, zu wählen ist. Danach folgt aus (18)

$$(19)\qquad M(R_1, R_2) \leqq \log\frac{R_2}{R_1} + \frac{k_3}{2\pi}R_1^{-1/a} = \log\frac{R_2}{R_1} + \frac{k_4}{R^{1/a}}.$$

Aus (16) und (19) ergibt sich also für $M(R_1, R_2)$ die beiderseitige Abschätzung

$$\log\frac{R_2}{R_1} - \frac{k_3}{R_1^{1/a}} \leqq M(R_1, R_2) \leqq \log\frac{R_2}{R_1} + \frac{k_4}{R_1^{1/a}}$$

oder mit $\gamma = \mathrm{Max}(k_3, k_4)$

$$(20)\qquad \left|M(R_1, R_2 - \log\frac{R_2}{R_1}\right| \leqq \gamma R_1^{-1/a};$$

(20) gilt für alle $R_2 > R_1 \geqq R_0$. Mit dieser Beziehung (20) haben wir nun den Anschluß an bekannte Untersuchungen[12]) gewonnen.

Wir setzen $\mathrm{Max}_{\Gamma_2}|z| = r_2(R)$, $\mathrm{Min}_{\Gamma_2}|z| = r_1(R)$. Aus (20) folgt die Existenz einer endlichen Zahl $\varkappa$ derart, daß $\lim_{R\to\infty}(\log r_1(R) - \log R) = \lim_{R\to\infty}(\log r_2(R) - \log R) = \varkappa$ gilt. Darüber hinaus läßt sich auch noch eine Aussage über die Güte der Konvergenz machen. Mit $c = 1/\alpha$ gilt nämlich die Abschätzung:

$$(20')\qquad \begin{aligned} |\log r_1(R) - \log R - \varkappa| &\leqq k_5 e^{-\frac{c}{c+2}\log R + \frac{1}{c+2}\log\log R},\\ |\log r_2(R) - \log R - \varkappa| &\leqq k_6 e^{-\frac{c}{c+2}\log R + \frac{1}{c+2}\log\log R} \end{aligned}$$

oder mit $k_7 = \mathrm{Max}(k_5, k_6)$

$$(20'')\qquad |\log r_j(R) - \log R - \varkappa| \leqq k_7 e^{-\frac{c}{c+2}\log R + \frac{1}{c+2}\log\log R} \quad \text{für } j = 1, 2$$

und alle $R \geqq R_0$, wobei nur R_0 hinreichend groß zu wählen ist. Da für alle $R \geqq R_0^*$ $\log R \leqq R^{c/2}$ gilt, folgt für die rechte Seite von (20″) weiter

$$e^{-\frac{c}{c+2}\log R + \frac{1}{c+2}\log\log R} = \frac{\log R^{\frac{1}{c+2}}}{\frac{c}{R^{c+2}}} < \frac{R^{\frac{c}{2(c+2)}}}{\frac{c}{R^{c+2}}} = R^{-\frac{c}{2(c+2)}}.$$

Wegen $\frac{c}{2(c+2)} = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2 + (\log 4)^2}{12\pi^2 + (\log 4)^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ gilt, wenn wir das

[12]) L. Ahlfors, Über eine in der neueren Wertverteilungslehre betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math. 58 (1932); O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. 3 (1938).

Maximum von K_0 und R_0^* wieder mit R_0 bezeichnen, für alle $R \geqq R_0$

$$|\log r_j(R) - \log R - \varkappa| \leqq \frac{k_7}{\sqrt[6]{R}}, \quad j = 1,2 \tag{21}$$

oder

$$\varkappa + \log R - \frac{k_7}{\sqrt[6]{R}} \leqq \log r_j(R) \leqq \varkappa + \log R + \frac{k_7}{\sqrt[6]{R}}. \tag{21'}$$

Wegen $e^{k_7 R^{-1/6}} \leqq 1 + \frac{k_8}{\sqrt[6]{R}}$ und $1 - \frac{k_9}{\sqrt[6]{R}} \leqq e^{-k_7 R^{-1/6}}$ folgt für alle $R > R_0$ mit $k_{10} = \operatorname{Max}(k_9, k_8)$

$$e^{\varkappa} R\left(1 - \frac{k_{10}}{\sqrt[6]{R}}\right) \leqq r_j(R) \leqq e^{\varkappa} R\left(1 + \frac{k_{10}}{\sqrt[6]{R}}\right). \tag{22}$$

Aus (22) folgt durch eine einfache Umrechnung

$$e^{-\varkappa} r_j\left(1 - \frac{k_{11}}{\sqrt[6]{r_j}}\right) \leqq R \leqq e^{-\varkappa} r_j\left(1 + \frac{k_{11}}{\sqrt[6]{r_j}}\right); \tag{22'}$$

k_{11} ist eine passende positive Konstante, die von r_j unabhängig ist.

6. Zum Beweis der in 1. angegebenen Behauptungen über Wachstumsordnung, Defekte und Indizes der Funktion $w = g(z)$ benötigen wir die Anzahlfunktionen $N(r,a)$ und Schmiegungsfunktionen $m(r,a)$ für beliebige Werte a.

Es sei $R > R_0$ beliebig vorgegeben. In der Z-Ebene betrachten wir die Bilder der a-Stellen, d. h. die Bilder der Punkte z_a, für welche $g(z_a) - a = 0$ gilt. Ihre auf $R_0 \leqq |Z| \leqq R$ gelegene Anzahl sei $\nu(R,a)$, wobei eine λ-fache a-Stelle in der z-Ebene auch in der Z-Ebene λ-fach gezählt wird. $\nu_1(R,a)$ bedeutet die Anzahl aller auf demselben Kreisring gelegenen a-Stellen, wobei aber jede λ-fache a-Stelle nur $(\lambda - 1)$-mal gezählt wird. Für $a \neq a_j$ ist offenbar $\nu_1(R,a) \equiv 0$. Aus der besonderen Form der angewandten Abbildungsfunktionen erkennt man nun, daß für hinreichend große R dem Kreis $|Z| = R$ in dem Streifengebiet der ζ_1- bzw. ζ_2-Ebene Kurvenbögen entsprechen, die in dem Gebiet $-R^{1/\alpha} - k_{12} < \Im\zeta_1 < -R^{1/\alpha} + k_{12}$ bzw. $R^{1/\alpha} - k_{12} < \Im\zeta_2 < R^{1/\alpha} + k_{12}$, k_{12} eine positive von R unabhängige Konstante, verlaufen. Daraus findet man sofort für alle $a \neq a_j$

$$\nu(R,a) = \frac{3}{\pi} R^{1/\alpha} + 0(1) \tag{23}$$

und für $a = a_j$, $j = 2,3,4$

$$\nu_1(R,a_j) = \frac{1}{\pi} R^{1/\alpha} + 0(1). \tag{24'}$$

Aus (23') und (24') lassen sich nun schließlich die Anzahlen $n(r,a)$ und $n_1(r,a)$ berechnen.

Dazu geben wir eine beliebige Zahl $r > 0$ vor, von der wir nur annehmen, daß sie hinreichend groß ist. Danach bestimmen wir R so, daß $r_1(R) = r$ ist. Dann gilt

$$n(r,a) \leqq \nu(R,a) + k_{13} = \frac{3}{\pi} R^{1/\alpha} + k_{13} + 0(1) = \frac{3}{\pi} R^{1/\alpha} + 0(1)$$

oder wegen (22') und $r_1 = r$

$$n(r,a) \leqq \frac{3}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha} \cdot r^{1/\alpha}\left(1+\frac{k_{11}}{\sqrt[6]{r}}\right)^{1/\alpha} + 0(1) = \frac{3}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha} r^{1/\alpha}(1+\eta(r))$$

mit $\eta(r) \to 0$ bei $r \to \infty$. Mit $r_2(R) = r$ findet man entsprechend

$$n(r,a) \geqq \frac{3}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha} r^{1/\alpha}\left(1-\frac{k_{11}}{\sqrt[6]{r}}\right)^{1/\alpha} + 0(1).$$

Mithin gilt für alle $a \neq a_j$

$$n(r,a) = \frac{3}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha} r^{1/\alpha}(1+\eta(r)) \tag{23}$$

und entsprechend für $n_j(r,a_j)$, $j = 2,3,4$,

$$n_1(r,a_j) = \frac{1}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha} r^{1/\alpha}(1+\eta_1(r)),\ n_1(r,a_1) \equiv 0. \tag{24}$$

Integration nach $\log r$ ergibt

$$N(r,a) = 3kr^{1/\alpha}(1+\eta(r)) \qquad a \neq a_j, \tag{25}$$

$$N_1(r,a_j) = kr^{1/\alpha}(1+\eta_1(r)) \text{ für } j = 2,3,4,\ N_1(r,a_1) \equiv 0. \tag{26}$$

Dabei ist $k = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\varkappa/\alpha}$. Die in (25) und (26) auftretenden neuen Funktionen $\eta(r)$ und $\eta_1(r)$ haben wieder die Eigenschaft $\lim\limits_{r\to\infty} \eta(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \eta_1(r) = 0$. Für ein beliebiges $a \neq a_j$ ist nach einem bekannten Satz [13]):

$$m(r,a) = m\left(r,\frac{1}{g-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{\log}\frac{1}{|g(re^{i\varphi})-a|}\,d\varphi = 0(1). \tag{27}$$

Damit folgt für die Charakteristik $T(r,g) = N(r,a) + m(r,a) + 0(1)$

$$T(r,g) = 3kr^{1/\alpha}(1+\eta^*(r)),\ \eta^*(r) \to 0 \text{ bei } r \to \infty. \tag{28}$$

Nach Definition der Wachstumsordnung

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,g)}{\log r}$$

erhalten wir für die Funktion $w = g(z)$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} + \lim_{r\to\infty} \frac{\log 3k + \log(1+\eta^*(r))}{\log r} = \frac{1}{\alpha} = 1{,}0486.... \tag{29}$$

Wegen $\frac{T(r,g)}{r^{1/\alpha}} = 3k(1+\eta^*(r)) \to 3k \neq 0, \infty$ bei $r \to \infty$ ist die Funktion $w = g(z)$ vom Mitteltypus der Ordnung 1,0486....

Weiter folgt aus (25) bis (28)

$$\begin{aligned} \delta(a_1) &= 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,a_1)}{T(r,g)} = 1, \\ \vartheta(a_j) &= \lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r,a_j)}{T(r,g)} = \lim_{r\to\infty} \frac{kr^{1/\alpha}(1+\eta(r))}{3kr^{1/\alpha}(1+\eta^*(r))} = \frac{1}{3}, \end{aligned} \tag{30}$$

[13]) O. Teichmüller, Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Deutsche Math. 2 (1937).

$j = 2, 3, 4$. Wegen $\sum_a (\delta(a) + \vartheta(a)) = \delta(a_1) + \vartheta(a_2) + \vartheta(a_3) + \vartheta(a_4)$ $= 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$ besitzt die Funktion $w = g(z)$ keine weiteren Defekte und Indizes. Mit (29) und (30) sind die bezüglich der Funktion $w = g(z)$ ausgesprochenen Behauptungen bewiesen.

(Eingegangen am 2. August 1943).

Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes.

Von

Gottfried Köthe in Gießen.

Die vorliegende Arbeit setzt die Untersuchungen über die allgemeine Theorie der vollkommenen Räume fort[1]).

Nach einer kurzen Wiederholung der Grundbegriffe und einigen für später nötigen Hilfsbetrachtungen in den §§ 1 und 2 wird in § 3 der Quotientenraum λ/α eines linearen topologisch abgeschlossenen Teilraumes α des vollkommenen Raumes λ eingeführt. Durch jede der in λ eingeführten Topologien wird λ/α ebenfalls zu einem linearen topologischen Raum. λ/α ist im allgemeinen kein vollkommener Raum mehr, ja sogar, wie ein Beispiel in § 5 zeigt, nicht immer vollständig. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Theorie der metrischen Räume. In einem vollständigen metrischen Raum ist der Quotientenraum eines abgeschlossenen linearen Teilraumes stets wieder metrisch und vollständig. λ/α besitzt einen konjugierten Raum, der mit dem Orthogonalraum $\bar{\alpha}$ von α, einem Teilraum des dualen Raumes λ^*, zusammenfällt. Dies gilt für die m-, s- und k-Topologie (vgl. § 1 zu ihrer Definition) des vollkommenen Raumes λ. Der wesentliche Inhalt von § 3 ist der Nachweis, daß diese drei Topologien von λ/α statt durch λ^* auch durch $\bar{\alpha}$ in derselben Weise erzeugt werden können (Satz 3 und 5).

In § 4 werden diese Ergebnisse auf die linearen Abbildungen $\mathfrak{A}$ eines vollkommenen Raumes λ in einem vollkommenen Raum μ angewendet. Es wird gezeigt (Satz 2), daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann ein m-Homomorphismus, d. h. ein Homomorphismus im Sinne der m-Topologie ist, wenn die transponierte Abbildung $\mathfrak{A}'$ von μ^* in λ^* einen orthogonalabgeschlossenen Bildraum $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ besitzt. Die s- und k-Homomorphismen $\mathfrak{A}$ lassen sich dadurch charakterisieren (Satz 3), daß $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen ist und $\mathfrak{A}'$ begrenzt bzw. schwach kompakt umkehrbar ist.

[1]) Wir beziehen uns oft auf folgende Arbeiten: KT, G. Köthe und O. Toeplitz, Journ. f. reine angew. Math. **171** (1934), S. 193—226; H, E. Hagemann, Math. Annalen **114** (1937), S. 126—143); D, J. Dieudonné, Ann. Sci. Ecole norm. sup. (3) **59** (1942), S. 107—139; K 1, G. Köthe, Math. Annalen **114** (1937), S. 91—125; K 2, G. Köthe, Journ. f. reine angew. Math. **178** (1938), S. 193—213; K 3, G. Köthe, Monatshefte Math. Phys. **47** (1939), S. 224—233; K 4, G. Köthe, Math. Annalen **116** (1939), S. 719—732.

Zur Beurteilung der Tragweite dieses Satzes sei erwähnt, daß er in dem Beispiel $\lambda = \mu = \sigma_r$, $1 < r < \infty$, dem Raum der Stellen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $\sum |x_i|^r < \infty$, bedeutet, daß jeder starke (d. h. metrische) Homomorphismus $\mathfrak{A}$ von σ_r in sich einen abgeschlossenen Bildraum besitzt, und daß $\mathfrak{A}'$ ebenfalls ein starker Homomorphismus mit abgeschlossenen Bildraum ist.

Das Beispiel von § 5 zeigt, daß anders als im Falle der metrischen Räume der Bildraum eines Homomorphismus nicht orthogonalabgeschlossen zu sein braucht. Verlangt man von einem m-Homomorphismus $\mathfrak{A}$, daß sein Bildraum abgeschlossen ist, so ist auch $\mathfrak{A}'$ ein m-Homomorphismus mit abgeschlossenem Bildraum (§ 4, Satz 4). Ob die entsprechenden Aussagen auch für s- und k-Homomorphismen gelten, ist ein noch ungelöstes Problem. Für k-Isomorphismen wird jedoch ein Teilresultat in dieser Richtung abgeleitet (§ 4, Satz 6), aus dem sich ein neuer Beweis des Reziprokentheorems in σ_∞ (vgl. K 3) ergibt, der ganz im Rahmen der Theorie der vollkommenen Räume verläuft.

Die Arbeit schließt sich zum Teil an eine Untersuchung von J. Dieudonne (D) an, der einen Teil der Theorie der vollkommenen Räume zu einer auch die metrischen Räume umfassenden Theorie der Dualität verallgemeinert hat. Die von ihm eingeführte schwache Topologie ist mit der hier als m-Topologie bezeichneten identisch. Die auf diese Topologie sich beziehenden Ergebnisse der vorliegenden Arbeit finden sich zum Teil bereits bei ihm, insbesondere § 3, Satz 3 und § 4, Satz 2.

§ 1.

Grundbegriffe. Komplette Mengen.

Zur Bequemlichkeit des Lesers seien die wichtigsten Begriffe der Theorie der vollkommenen Räume kurz wiederholt.

λ sei ein linearer Raum mit abzählbar vielen komplexen Koordinaten. Mit $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots)$, x_i und y_i komplex, gehört also auch $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ und $r\mathfrak{x} = (rx_1, rx_2, \ldots)$, r komplex, zu λ. Die Stelle $(0, 0, \ldots)$ wird mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

Der zu λ *duale Raum* λ^* besteht aus allen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, deren skalare Produkte $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ mit jedem $\mathfrak{x}$ aus λ absolut konvergent sind. λ heißt *vollkommen*, wenn $(\lambda^*)^* = \lambda^{**} = \lambda$ ist.

Eine Menge M von Stellen $\mathfrak{x}$ aus λ heißt *beschränkt*, wenn zu jedem $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ eine positive Zahl $k(\mathfrak{u})$ gehört, so daß $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq k(\mathfrak{u})$ ist für alle $\mathfrak{x} \in M$. Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ heißt *schwach konvergent*, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ für jedes $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ existiert. Liegt $\mathfrak{x}$ in λ und ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{u} \in \lambda^*$, so heißt $\mathfrak{x}$ der *schwache Limes* von $\mathfrak{x}^{(n)}$, in Zeichen $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$.

Ist N eine Menge aus λ^*, $\mathfrak{x} \in \lambda$, so bezeichnen wir die obere Grenze

$\sup_{u \in N} |u\,\xi|$ mit $(\xi)_N$. Eine beschränkte Menge N aus λ^* heißt *begrenzt*, wenn für jede schwach gegen 0 konvergente Folge $\xi^{(n)}$ aus λ auch $(\xi^{(n)})_N$ gegen Null geht. Eine Menge N aus λ^* heißt *schwach kompakt*, wenn jede unendliche Teilmenge von N eine schwach konvergente Teilfolge enthält. Jede begrenzte Menge ist schwach kompakt (vgl. K 4, § 1, Satz 4).

Es sei N eine beschränkte Menge aus λ^*, $\varepsilon > 0$, ξ eine Stelle aus λ. Mit $U_{(N,\varepsilon)}(\xi)$ bezeichnen wir die Menge aller η aus λ, die der Ungleichung

$$\sup_{u \in N} |u(\xi - \eta)| = (\xi - \eta)_N < \varepsilon \tag{1}$$

genügen.

ξ sei fest, ε durchlaufe alle reellen Zahlen > 0. Durchläuft N a) alle beschränkten, b) alle begrenzten, c) alle finiten (d. h. nur aus endlich vielen u bestehenden), d) alle beschränkten, schwach kompakten Mengen aus λ^*, so durchlaufen die $U_{(N,\varepsilon)}(\xi)$ die Gesamtheit a) der *starken*, b) der *schwachen*, c) der *minimalen*, d) der *k-Umgebungen* von ξ. Man erhält so die *starke, schwache, minimale, k-Topologie* von λ (bezüglich λ^*). Wir wollen sie auch abkürzen als $st\text{-}T(\lambda, \lambda^*)$, $s\text{-}T(\lambda, \lambda^*)$, $m\text{-}T(\lambda, \lambda^*)$, $k\text{-}T(\lambda, \lambda^*)$.

Durch diese Topologien wird λ zu einem topologischen Raum[2]). Ein vollkommener Raum λ ist topologisch vollständig [im Sinne von A. Weil, daß jede Cauchy-Familie eine Häufungsstelle besitzt[3])] bezüglich der starken, schwachen und k-Topologie, jedoch nicht im Sinne der minimalen Topologie.

M sei eine beschränkte Menge in λ. M^+ sei die Menge aller u aus λ^* mit $(u)_M \leqq 1$. Mit $\tilde{M}$ werde die Menge aller ξ aus λ mit $(\xi)_{M^+} \leqq 1$ bezeichnet. Ist $M = \tilde{M}$, so heißt M *komplett*. Für jede beschränkte Menge M ist $\tilde{M}$ wieder beschränkt und komplett, $\tilde{M}$ heißt die *komplette Hülle* von M. Aus der Definition von $\tilde{M}$ folgt für jedes $u \in \lambda^*$

$$(u)_{\tilde{M}} = (u)_M. \tag{2}$$

Satz 1. *Ist die beschränkte Menge M aus λ begrenzt bzw. schwach kompakt, so ist ihre komplette Hülle wieder begrenzt bzw. schwach kompakt.*

a) M sei begrenzt. Dann geht für jede Folge $u^{(n)} \to 0$ aus λ^* auch $(u^{(n)})_M$ gegen Null. Es ist aber nach (2) $(u^{(n)})_{\tilde{M}} = (u^{(n)})_M$, also geht auch $(u^{(n)})_{\tilde{M}}$ gegen Null, $\tilde{M}$ ist daher begrenzt.

b) Nach K 4, § 2, Satz 2 und 3 ist eine beschränkte Menge M aus λ dann und nur dann schwach kompakt, wenn für die Abschnitte

[2]) Ausführlich werden diese Topologien in K 1, § 5; K 2, § 1 und K 4, § 2 behandelt.

[3]) Vgl. K 4, § 3.

$u_n = (u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$ jeder Stelle $u \varepsilon \lambda^*$

$$(u - u_n)_M \to 0 \tag{3}$$

gilt. Wiederum folgt aus (2) und (3) $(u - u_n)_{\tilde{M}} \to 0$, also ist $\tilde{M}$ schwach kompakt.

Eine Menge M heißt *normal,* wenn sie mit $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ jede Stelle $\hat{\mathfrak{x}}$ mit $|\hat{x}_i| = |x_i|$, $i = 1, 2, \ldots$, enthält. In K 2, § 1 und K 4, § 1 wurde bewiesen, daß die normale Hülle jeder beschränkten bzw. begrenzten bzw. beschränkten schwach kompakten Menge wieder diese Eigenschaft hat. Daraus und aus Satz 1 ergibt sich sofort

Satz 2. *Man erhält ein zum ursprünglichen Umgebungssystem äquivalentes System von Umgebungen der starken, schwachen bzw. k-Topologie, wenn man sich auf solche* $U_{(N,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ *beschränkt, deren definierende Mengen N aus* λ^* *normal und komplett sind.*

Satz 3. *Jede beschränkte komplette Menge ist abgeschlossen im Sinne jeder der vier Topologien.*

Beweis. Sei M komplett und beschränkt in λ, $\mathfrak{x}^{(0)}$ eine Häufungsstelle von M. Dann gibt es speziell für die aus einer Stelle $u \in M^+$ bestehende Menge aus λ^* eine Folge $\mathfrak{x}^{(i)}$ aus M mit $\lim_{i \to \infty} |u\mathfrak{x}^{(i)}| = |u\mathfrak{x}^{(0)}|$. Da $|u\mathfrak{x}^{(0)}| \leqq 1$ ist, ist auch $|u\mathfrak{x}^{(i)}| \leqq 1$ für alle $u \in M^+$, d. h. $\mathfrak{x}^{(0)} \in M$.

λ und μ seien vollkommen, $\mathfrak{A}$ sei eine Matrix, die auf jede Stelle $\mathfrak{x}$ von λ angewendet werden kann und eine Stelle $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus μ ergibt. $\mathfrak{A}$ ist dann eine lineare, im Sinne jeder der vier Topologien stetige Abbildung, die also Häufungsstellen in Häufungsstellen überführt[4]). Umgekehrt wird jede lineare, im Sinn der minimalen, der schwachen oder der k-Topologie stetige Abbildung A von ganz λ in μ durch eine Matrix erzeugt[5]). Die zu $\mathfrak{A}$ transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ bildet μ^* in λ^* ab.

Satz 4. *M sei eine komplette, beschränkte, schwach kompakte Menge in* λ. *Durch eine lineare Abbildung* $\mathfrak{A}$ *von* λ *in* μ *wird sie in eine beschränkte, schwach kompakte und im Sinne jeder der vier Topologien abgeschlossene Menge* $\mathfrak{A}(M)$ *übergeführt.*

Beweis. $\mathfrak{A}(M)$ ist nach K 4, § 5, Satz 1 wieder beschränkt und schwach kompakt. Sei $\mathfrak{y}^{(0)}$ eine Häufungsstelle von $\mathfrak{A}(M)$. Es gibt dann zu $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$[6]) aus λ^* eine Folge $\mathfrak{y}^{(n,k)}$ in $\mathfrak{A}(M)$ mit $\lim_k \mathfrak{e}_i \mathfrak{y}^{(n,k)} = \mathfrak{e}_i \mathfrak{y}^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n$.

---

[4]) Für die k-Topologie wird dies in K 4, § 5, Satz 1 bewiesen. Für die *st*-, *s*- und *m*-Topologie folgt dies genau so aus der Tatsache, daß eine beschränkte bzw. begrenzte, bzw. finite Menge durch $\mathfrak{A}'$ in eine ebensolche Menge übergeführt wird.

[5]) Es genügt sogar die Voraussetzung, daß die Abbildung nur stetig ist im Sinne der zugehörigen Limesbegriffe, vgl. KT, § 6, Satz 7 und K 4, § 5, Satz 1. Für die starke Topologie gilt dies nicht mehr.

[6]) $\mathfrak{e}_i$ ist die Stelle, deren i-te Koordinate gleich 1 und deren übrige Koordinaten gleich 0 sind. Sie liegt in jedem vollkommenen Raum.

Durch Diagonalfolgenbildung erhält man eine koordinatenweise gegen $\mathfrak{y}^{(0)}$ konvergente Folge $\mathfrak{y}^{(i_i k_i)} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}^{(i)}$. Wegen der schwachen Kompaktheit von M konvergiert eine Teilfolge $\mathfrak{z}^{(j)}$ der $\mathfrak{z}^{(i)}$ schwach gegen eine Stelle $\mathfrak{z}$, die nach Satz 3 zu M gehört. Also ist wegen der schwachen Stetigkeit von $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}\mathfrak{z}^{(j)} \to \mathfrak{A}\mathfrak{z}$, andererseits ist $\mathfrak{y}^{(0)}$ der koordinatenweise Limes, daher ist $\mathfrak{y}^{(0)} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{A}(M)$.

§ 2.

Ein Satz über konvexe Körper [7]).

Wir benötigen im folgenden den Erweiterungssatz für Linearfunktionen in allgemeinerer Gestalt als in K 4. Es sei λ ein linearer Raum, d. h. mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}$, a, b komplex, erklärt und liegen in λ.

Satz 1. *μ sei ein linearer Teilraum von λ. Das (nicht als linear vorausgesetzte) Funktional $k(\mathfrak{x})$ sei in ganz λ erklärt und habe die Eigenschaften*

1. $k(\mathfrak{x}) \geqq 0$,
2. $k(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \leqq k(\mathfrak{x}) + k(\mathfrak{y})$,
3. $k(a\mathfrak{x}) = |a|\, k(\mathfrak{x})$, *$a$ beliebig komplex.*

$f(\mathfrak{x})$ sei eine in μ erklärte (komplexwertige) Linearfunktion und es gelte in μ

$$|f(\mathfrak{x})| \leqq k(\mathfrak{x}). \tag{4}$$

Dann läßt sich $f(\mathfrak{x})$ linear auf ganz λ so erweitern, daß (4) gilt.

Beweis [8]). Wir setzen $f(\mathfrak{x}) = f_1(\mathfrak{x}) + i f_2(\mathfrak{x})$, $f_1(\mathfrak{x})$ und $f_2(\mathfrak{x})$ reell. Dann sind $f_1(\mathfrak{x})$ und $f_2(\mathfrak{x})$ reelle Linearfunktionen. Sie sind wegen $f(i\mathfrak{x}) = if(\mathfrak{x}) = if_1(\mathfrak{x}) - f_2(\mathfrak{x})$ durch $f_2(\mathfrak{x}) = -f_1(i\mathfrak{x})$ verknüpft. Da auch $|f_1(\mathfrak{x})| \leqq k(\mathfrak{x})$ gilt, gibt es nach einem von S. Banach bewiesenen Satz [9]) eine reelle auf ganz λ erklärte Fortsetzung $F_1(\mathfrak{x})$ von $f_1(\mathfrak{x})$ mit $F_1(\mathfrak{x}) \leqq k(\mathfrak{x})$. Wegen $-F_1(\mathfrak{x}) = F_1(-\mathfrak{x}) \leqq k(-\mathfrak{x}) = k(\mathfrak{x})$ ist $|F_1(\mathfrak{x})| \leqq k(\mathfrak{x})$.

Wir setzen nun $F(\mathfrak{x}) = F_1(\mathfrak{x}) - iF_1(i\mathfrak{x})$. Dann ist $F(\mathfrak{x})$ auf μ mit $f(\mathfrak{x})$ identisch. $F(\mathfrak{x})$ ist komplex linear auf ganz λ, denn $F(i\mathfrak{x}) =$

---

[7]) Dieser Paragraph ist eine Verallgemeinerung von Überlegungen, die für metrische Räume von S. Kaczmarz und H. Steinhaus (Theorie der Orthogonalreihen, Warschau-Lemberg 1935, S. 33 ff.) angestellt wurden.

[8]) Der Beweis ist derselbe wie der von H. F. Bohnenblust u. A. Sobczyk [Bull Amer. Math. Soc. **44** (1938), S. 91—93] für die Übertragung des einfachen Erweiterungssatzes ins Komplexe.

[9]) Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932, S. 28. Der Satz lautet: Es sei in einem reellen linearen Raum λ ein Funktional $p(\mathfrak{x})$ mit den Eigenschaften $p(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \leqq p(\mathfrak{x}) + p(\mathfrak{y})$ und $p(t\mathfrak{x}) = tp(\mathfrak{x})$, $t \geqq 0$, gegeben. Ist $f(\mathfrak{x})$ eine auf einem linearen Teilraum μ von λ erklärte Linearfunktion mit $f(\mathfrak{x}) \leqq p(\mathfrak{x})$, so gibt es eine Erweiterung $F(\mathfrak{x})$ von $f(\mathfrak{x})$ auf ganz λ, für die ebenfalls $F(\mathfrak{x}) \leqq p(\mathfrak{x})$ ist.

$= F_1(i\mathfrak{x}) - iF_1(-\mathfrak{x}) = iF(\mathfrak{x})$. Schließlich wird für $F(\mathfrak{x}) = re^{i\vartheta}$

$|F(\mathfrak{x})| = e^{-i\vartheta}F(\mathfrak{x}) = F(e^{-i\vartheta}\mathfrak{x}) = F_1(e^{-i\vartheta}\mathfrak{x}) \leqq k(e^{-i\vartheta}\mathfrak{x}) = k(\mathfrak{x})$.

Damit ist (4) für $F(\mathfrak{x})$ bewiesen.

Eine Menge M von Elementen eines komplexen linearen Raumes λ heißt *absolut konvex*, wenn sie mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ alle $t_1\mathfrak{x} + t_2\mathfrak{y}$ enthält, t_1, t_2 komplex, $|t_1| + |t_2| \leqq 1$. Z. B. ist jede normale Umgebung von $\mathfrak{o}$ absolut konvex.

Eine Menge K von Stellen eines vollkommenen Raumes λ heißt ein *absolut konvexer m-, s-, k-Körper*, wenn K absolut konvex ist und wenigstens einen inneren Punkt enthält, d. h. eine Stelle, die mit einer ganzen *m-, s-, k*-Umgebung in K liegt.

K sei ein absolut konvexer Körper mit $\mathfrak{o}$ als innerem Punkt, $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ eine beliebige Stelle aus λ. Ein geeignetes komplexes Vielfaches $\frac{1}{a}\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}$ liegt in K, da die in K liegende Umgebung $U(\mathfrak{o})$ ein solches $\frac{1}{a}\mathfrak{x}$ enthält. Daher ist die untere Grenze $k(\mathfrak{x})$ aller $|a|$ mit $\frac{1}{a}\mathfrak{x}$ in K endlich und nichtnegativ. $k(\mathfrak{x})$ wird als das *Minkowskische Funktional* von K bezeichnet.

Satz 2. *Für alle Punkte aus K gilt $k(\mathfrak{x}) \leqq 1$; ist $\mathfrak{x}$ innerer Punkt, so ist $k(\mathfrak{x}) < 1$. Für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ aus λ gilt $k(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq k(\mathfrak{x}) + k(\mathfrak{y})$, $k(a\mathfrak{x}) = |a|k(\mathfrak{x})$, a komplex. Liegt ganz $U_{(N,1)}(\mathfrak{o})$ in K, so ist $k(\mathfrak{x}) \leqq (\mathfrak{x})_N$.*

Beweis. a) Für die Punkte aus K ist nach Definition $k(\mathfrak{x}) \leqq 1$. $\mathfrak{x}$ sei innerer Punkt. Dann müssen für jede Folge $b_n \to 1$, $b_n > 1$, die Stellen $b_n\mathfrak{x}$ von einem n_0 ab in der zu K gehörenden Umgebung von $\mathfrak{x}$ liegen (denn die Folge $b_n\mathfrak{x}$ konvergiert im Sinn jeder der vier Topologien gegen $\mathfrak{x}$), also ist $k(\mathfrak{x}) \leqq \frac{1}{b_{n_0}} < 1$.

b) Es seien $a_1\mathfrak{x}$ und $a_2\mathfrak{y}$ in K. Wegen der absoluten Konvexität von K können wir a_1 und a_2 durch ihre Beträge t_1 und t_2 ersetzen. Mit $t_1\mathfrak{x}$ und $t_2\mathfrak{y}$ liegt auch die auf der Verbindungsstrecke liegende Stelle $\frac{t_2}{t_1+t_2}\cdot t_1\mathfrak{x} + \frac{t_1}{t_1+t_2}\cdot t_2\mathfrak{y} = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$ in K, also ist $k(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq \frac{t_1+t_2}{t_1 t_2} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$.

Übergang zur unteren Grenze ergibt $k(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq k(\mathfrak{x}) + k(\mathfrak{y})$.

c) $k(a\mathfrak{x}) = |a|k(\mathfrak{x})$ folgt aus der absoluten Konvexität von K.

d) Sei $U_{(N,1)}(\mathfrak{o})$ in K. Setzt man $r = (\mathfrak{x})_N = \sup_{u \in N} |u\mathfrak{x}|$, so liegt für jedes $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{r+\varepsilon}\mathfrak{x}$ in $U_{(N,1)}(\mathfrak{o})$, also $k(\mathfrak{x}) \leqq r$.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 3. *λ sei vollkommen, K ein absolut konvexer m-, s- oder k-Körper mit $\mathfrak{o}$ als innerem Punkt. $\mathfrak{x}_0$ sei ein Punkt mit $k(\mathfrak{x}_0) = 1$. Dann gibt es in λ^* eine Stelle $\mathfrak{u}_0$ mit $\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}_0 = 1$ und $|\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}| \leqq 1$ für alle $\mathfrak{x}$ aus K.*

Beweis. μ sei die Menge aller komplexen Vielfachen $a\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{x}_0$. Wir setzen $f(a\mathfrak{x}_0) = a$. Damit ist auf μ eine Linearfunktion erklärt. Es ist $|f(a\mathfrak{x}_0)| \leqq k(a\mathfrak{x}_0)$, denn es ist ja $k(a\mathfrak{x}_0) = |a|\, k(\mathfrak{x}_0) = |a|$. Da $k(\mathfrak{x})$ nach Satz 2 die in Satz 1 verlangten Eigenschaften 1. bis 3. besitzt, gibt es eine Erweiterung $F(\mathfrak{x})$ von f auf ganz λ mit $|F(\mathfrak{x})| \leqq k(\mathfrak{x})$. Nach Satz 2 gilt weiter $|F(\mathfrak{x})| \leqq (\mathfrak{x})_N$, $F(\mathfrak{x})$ ist also m-, s- bzw. k-topologisch stetig, wird daher durch eine Stelle $\mathfrak{u}_0$ aus λ^* erzeugt. Es ist also $F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}_0\mathfrak{x}$, speziell $\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}_0 = 1$ und $|\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}| \leqq 1$ für alle $\mathfrak{x} \in K$.

§ 3.

Definition und topologische Eigenschaften des Quotientenraumes.

λ sei ein vollkommener Raum, α ein linearer Teilraum von λ. Enthält α alle seine Häufungsstellen, so heißt α *topologisch abgeschlossen* im Sinn der betreffenden Topologie. Es gilt nun, daß die topologische Abgeschlossenheit von α im Sinne der minimalen, der schwachen und der k-Topologie gleichbedeutend ist mit der Orthogonalabgeschlossenheit von α[10]). Dies bedeutet folgendes: Der *Orthogonalraum* $\bar{\alpha}$ zu α besteht aus allen $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ mit $\mathfrak{u}\mathfrak{y} = 0$ für alle $\mathfrak{y} \in \alpha$. Ist $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, so heißt α *orthogonalabgeschlossen*. Ist α stark top. abgeschlossen, so braucht α nicht orthogonalabgeschlossen zu sein.

α sei ein top. abgeschlossener Teilraum von λ. Mit λ/α bezeichnen wir den linearen Raum der additiven Restklassen von λ nach α. Ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus λ, so ist also die zugehörige Restklasse $\hat{\mathfrak{x}}$ die Menge aller Stellen $\mathfrak{x} + \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \in \alpha$.

Die Topologien von λ übertragen sich in folgender Weise auf λ/α: Es sei $U_{(N,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ eine Umgebung von $\mathfrak{x}$. Sie erzeugt eine Umgebung $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{x}})$ der Restklasse $\hat{\mathfrak{x}}$ in λ/α, wenn man festsetzt, daß ihr alle Restklassen $\hat{\mathfrak{y}}$ mit einem Repräsentanten $\mathfrak{y}$ in $U_{(N,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ angehören. Die Umgebung $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{x}})$ wird also gegeben durch alle $\mathfrak{y}$, die der Ungleichung

$$(5) \qquad \inf_{\mathfrak{y} \in \hat{\mathfrak{y}}} (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})_N = \inf_{\mathfrak{y} \in \hat{\mathfrak{y}}} \sup_{\mathfrak{u} \in N} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon, \quad \mathfrak{x} \text{ beliebig in } \hat{\mathfrak{x}},$$

genügen.

Durchläuft N die beschränkten bzw. begrenzten bzw. finiten bzw. beschränkten und schwach kompakten Mengen aus λ^*, so erhält man die *starke*, *schwache*, *minimale* bzw. *k-Topologie von* λ/α *bezüglich* λ^*, abgekürzt als *st-T* $(\lambda/\alpha, \lambda^*)$, *s-T* $(\lambda/\alpha, \lambda^*)$, *m-T* $(\lambda/\alpha, \lambda^*)$, *k-T* $(\lambda/\alpha, \lambda^*)$.

Daß die Hausdorffschen Axiome erfüllt sind, sieht man folgendermaßen ein:

Es ist klar, daß (5) unabhängig vom Repräsentanten $\mathfrak{x}$ von $\hat{\mathfrak{x}}$ ist.

1. $\hat{\mathfrak{x}}$ liegt stets in $U(\hat{\mathfrak{x}})$.

2. Sind $U(\mathfrak{x})$, $V(\mathfrak{x})$ zwei Umgebungen von $\mathfrak{x}$ und $W(\mathfrak{x})$ eine in $U(\mathfrak{x})$ und $V(\mathfrak{x})$ enthaltene Umgebung von $\mathfrak{x}$, so liegt die ihr zugeordnete Umgebung $W(\hat{\mathfrak{x}})$ im Durchschnitt von $U(\hat{\mathfrak{x}})$ und $V(\hat{\mathfrak{x}})$.

[10]) Zu diesem Satz vgl. K 1, § 6, Satz 2; K 2, § 5, Satz 1; K 4. § 4, Satz 4.

3. Ist $\hat{\mathfrak{y}}$ in $U(\hat{\mathfrak{x}})$, so liegt ein Repräsentant $\mathfrak{y}$ in $U(\mathfrak{x})$, also ein $V(\mathfrak{y})$ ganz in $U(\mathfrak{x})$, daher das zugeordnete $V(\hat{\mathfrak{y}})$ ganz in $U(\hat{\mathfrak{x}})$.

4. Nachweis des Trennungsaxioms. Sei $\hat{\mathfrak{x}} \neq \hat{\mathfrak{y}}$, d. h. $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ nicht in α. Wegen der top. Abgeschlossenheit von α gibt es eine Umgebung $U_{(N,\varepsilon)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$, in der keine Stelle aus α liegt, d. h. $(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{z})_N \geqq \varepsilon$ für alle $\mathfrak{z}$ aus α. Die Umgebungen $U_{\left\{N,\frac{\varepsilon}{2}\right\}}(\hat{\mathfrak{x}})$ und $U_{\left\{N,\frac{\varepsilon}{2}\right\}}(\hat{\mathfrak{y}})$ haben nun keine Punkte gemeinsam, denn andernfalls gäbe es Stellen $\mathfrak{x}^{(1)}$, $\mathfrak{y}^{(1)}$ mit $\mathfrak{x}^{(1)}-\mathfrak{y}^{(1)} = \mathfrak{z}$ in α und $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(1)})_N < \frac{\varepsilon}{2}$, $(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(1)})_N < \frac{\varepsilon}{2}$. Dies führt zum Widerspruch, denn $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(1)})-(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(1)}) = (\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}$ ergäbe $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(1)})_N + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^{(1)})_N \geqq ((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z})_N$, die linke Seite ist aber $< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$, die rechte $\geqq \varepsilon$.

Ist α orthogonalabgeschlossen, so lassen sich in λ/α also vier Topologien erklären, ist α dagegen stark top. abgeschlossen und nicht orthogonalabgeschlossen, so läßt sich auf λ/α nur die starke Topologie übertragen. Wir werden im folgenden die starke Topologie nicht mehr betrachten, sondern uns auf die drei anderen beschränken.

Die Menge der top. stetigen komplexwertigen Linearfunktionen auf einem linearen topologischen Raum ϱ bildet selbst einen linearen Raum, den *konjugierten Raum* ϱ'. Ist ϱ ein vollkommener Raum λ, so ist λ' im Fall der schwachen, minimalen und k-Topologie bekanntlich gleich dem dualen Raum λ^*.

Satz 1. *α sei orthogonalabgeschlossen. Die zu λ/α im Sinne der s-, m-, k-Topologie konjugierten Räume fallen mit $\bar{\alpha}$ zusammen. Es gilt sogar, daß jede Linearfunktion $u(\hat{\mathfrak{x}})$ auf λ/α, für die aus der schwachen Konvergenz einer Repräsentantenfolge $\mathfrak{x}^{(n)}$ stets die Konvergenz von $u(\hat{\mathfrak{x}}^{(n)})$ folgt, durch eine Stelle aus $\bar{\alpha}$ erzeugt werden kann*

Beweis. Ist $\mathfrak{u} \in \bar{\alpha}$, so ist durch $u(\hat{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ eine Linearfunktion auf λ/α erklärt. Die durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ des dualen Raumes λ^* in λ erzeugte Linearfunktion $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ ist im Sinne jeder der drei Topologien stetig: Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so ist für jedes $\mathfrak{x}$ aus der s-, m-, k-Umgebung $(\mathfrak{x})_{\mathfrak{u}} < \varepsilon$ von $\mathfrak{o}$ $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| < \varepsilon$. Die durch die Umgebung $(\mathfrak{x})_{\mathfrak{u}} < \varepsilon$ erzeugte Umgebung $U_{(\mathfrak{u},\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{o}})$ von $\hat{\mathfrak{o}}$ ergibt dann $|u(\hat{\mathfrak{x}})| < \varepsilon$, also ist $u(\hat{\mathfrak{x}})$ im Sinne jeder der drei Topologien stetig.

Sei nun umgekehrt $u(\hat{\mathfrak{x}})$ eine auf λ/α erklärte Linearfunktion. Setzt man $u(\mathfrak{x}) = u(\hat{\mathfrak{x}})$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus der Restklasse $\hat{\mathfrak{x}}$, so erhält man eine auf ganz λ erklärte Linearfunktion. Sie ist im selben Sinne stetig wie $u(\hat{\mathfrak{x}})$: Gibt es nämlich zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $U_{(N,\eta)}(\hat{\mathfrak{o}})$, so daß $|u(\hat{\mathfrak{x}})| < \varepsilon$ ist für alle $\hat{\mathfrak{x}}$ aus dieser Umgebung, so ist für alle $\mathfrak{x}$ aus $U_{(N,\eta)}(\mathfrak{o})$ offenbar $|u(\mathfrak{x})| < \varepsilon$. Jede im Sinne einer der drei Topologien stetige Linearfunktion wird aber durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* erzeugt [11]). Wegen

[11]) K 2, § 2, Satz 2; K 4, § 4, Satz 2.

$u(\mathfrak{z}) = 0$ für alle $\mathfrak{z} \in \alpha$ liegt $\mathfrak{u}$ speziell in $\bar{\alpha}$. Also ist $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}, \mathfrak{u} \in \bar{\alpha}$.

Die letzte Behauptung des Satzes folgt so: Die wie oben zu $u(\hat{\mathfrak{x}})$ konstruierte Linearfunktion $u(\mathfrak{x})$ auf λ hat die Eigenschaft, daß aus der schwachen Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ die Konvergenz von $u(\mathfrak{x}^{(n)})$ folgt, sie ist also schwach stetig, jede schwach stetige Linearfunktion wird aber nach KT § 3, Satz 6 durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* erzeugt.

Auch der (im Augenblick nicht als abgeschlossen vorausgesetzte) Teilraum α von λ läßt sich mit der ihm als Teilraum von λ durch λ^* aufgeprägten Topologie $T(\alpha, \lambda^*)$ als linearer top. Raum auffassen. Auch hier kann man nach dem konjugierten Raum fragen. Es gilt

Satz 2. *α sei ein linearer Teilraum von λ. Die im Sinne der Topologien s-$T(\alpha, \lambda^*)$, m-$T(\alpha, \lambda^*)$ und k-$T(\alpha, \lambda^*)$ zu α konjugierten Räume fallen mit $\lambda^*/\bar{\alpha}$ zusammen.*

Beweis. Jede im Sinne einer der drei Topologien stetige auf α erklärte Linearfunktion läßt sich nach dem Erweiterungssatz (vgl. § 2, Satz 1 oder einfacher K 2, § 3, Satz 3; K 4, § 4, Satz 3) zu einer auf ganz λ erklärten im selben Sinne dort stetigen Linearfunktion fortsetzen, die also durch eine Stelle $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ erzeugt wird. Umgekehrt erzeugen die Stellen $\mathfrak{u}$ aus λ^*, die derselben Restklasse nach $\bar{\alpha}$ angehören. dieselbe Linearfunktion in α, die dort im Sinne jeder der drei Topologien stetig ist.

Wie ein Beispiel in § 5 zeigen wird, kann auch für orthogonalabgeschlossene α nicht jede auf α erklärte schwach stetige (also nur limes-, aber nicht häufungsstellentreue) Linearfunktion durch eine Stelle aus λ^*/α erklärt werden.

Nach Satz 2 ist also für einen orthogonalabgeschlossenen linearen Teilraum α der Quotientenraum λ/α der konjugierte Raum von $\bar{\alpha}$ und nach Satz 1 $\bar{\alpha}$ der konjugierte Raum von λ/α ($\bar{\alpha}$ und λ/α sind dual im Sinne von Dieudonné zueinander).

Es liegt nun nahe, in λ/α durch $\bar{\alpha}$ statt durch λ^* die drei Topologien einzuführen. Das Ziel der folgenden Überlegungen ist der Nachweis, daß diese Topologien mit den ursprünglichen übereinstimmen.

Als die *minimale Topologie m-$T(\lambda/\alpha, \bar{\alpha})$ von λ/α bezüglich $\bar{\alpha}$* werden wir diejenige bezeichnen, die durch die Umgebungen $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{x}})$, N eine Menge von endlich vielen Stellen aus $\bar{\alpha}$, in λ/α erzeugt wird. Analog wird s-$T(\lambda/\alpha, \bar{\alpha})$ und k-$T(\lambda/\alpha, \bar{\alpha})$ durch die $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{x}})$ erzeugt, bei denen man sich auf die begrenzten bzw. beschränkten und schwach kompakten Mengen N aus $\bar{\alpha}$ beschränkt.

Satz 3. *Die beiden Topologien m-$T(\lambda/\alpha, \lambda^*)$ und m-$T(\lambda|\alpha, \bar{\alpha})$ sind äquivalent.*

Beweis [12]). Da jede Umgebung der Topologie m-$T(\lambda/\alpha, \bar{\alpha})$ eine Umgebung aus m-$T(\lambda/\alpha, \lambda^*)$ ist, genügt es zu zeigen, daß jede Umgebung

[12]) Wir geben den Dieudonnéschen Beweis für unseren Spezialfall wieder.

(6) $$\inf_{\mathfrak{y}\in\hat{\mathfrak{U}}} |\mathfrak{u}^{(i)}\mathfrak{y}| < 1, \ \mathfrak{u}^{(i)} \in \lambda^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

eine Umgebung

(7) $$|\mathfrak{v}^{(j)}\hat{\mathfrak{y}}| < 1, \ \mathfrak{v}^{(j)} \in \overline{\alpha}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

enthält.

Man bilde zuerst die lineare Hülle H der $\mathfrak{u}^{(i)}$ in λ^*, dann ihren Durchschnitt mit $\overline{\alpha}$, wähle darin eine lineare Basis $\mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(r)}$ und ergänze sie durch Stellen $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(q)}$ zu einer Basis von H. Dann gilt für jedes $\mathfrak{u}^{(i)}$ eine Darstellung

(8) $$\mathfrak{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\mathfrak{v}^{(j)} + \sum_{k=1}^{q} b_{ik}\mathfrak{w}^{(k)}.$$

Die $\mathfrak{v}^{(j)}$ können von vornherein so gewählt werden, daß

(9) $$\sum_{j=1}^{r} |a_{ij}| < 1, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

gilt. Mit diesen $\mathfrak{v}^{(j)}$ bilden wir die Umgebung (7). Wir haben zu zeigen, daß aus (7) die Ungleichung (6) folgt.

Die Stelle $\mathfrak{y}$ aus λ genüge (7). Zu jedem k existiert nach dem Erweiterungssatz ein $\mathfrak{z}^{(k)}$ in λ, das auf $\overline{\alpha}$ verschwindet und die Gleichungen $\mathfrak{w}^{(k)}\mathfrak{z}^{(k)} = \mathfrak{w}^{(k)}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{w}^{(i)}\mathfrak{z}^{(k)} = 0$ für $i \neq k$ erfüllt[13]). Wir setzen $\mathfrak{z} = \sum_{1}^{q} \mathfrak{z}^{(k)}$. $\mathfrak{z}^{(k)}$ ist orthogonal zu $\overline{\alpha}$, liegt also in $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, daher liegt auch $\mathfrak{z}$ in α und es ist nach (7), (8) und (9)

$$|\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{y} - \mathfrak{z})| \leqq |\sum_{j} a_{ij}(\mathfrak{v}^{(j)}\mathfrak{y})| \leqq \sum |a_{ij}| < 1,$$

also (6) erfüllt.

Als einfache Folgerung ergibt sich

Satz 4. *Eine Folge $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ aus λ/α ist dann und nur dann m-top. konvergent, wenn für jedes $\mathfrak{v}$ aus $\overline{\alpha}$ die Folge $\mathfrak{v}\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent ist, $\mathfrak{x}^{(n)}$ irgendein Repräsentant von $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$.*

Die Bedingung ist notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so gibt es zu je endlich vielen $\mathfrak{v}^{(i)}$ aus $\overline{\alpha}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für $n, m > n_0$ $|\mathfrak{v}^{(i)}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)})| = |\mathfrak{v}^{(i)}(\hat{\mathfrak{x}}^{(n)} - \hat{\mathfrak{x}}^{(m)})| < \varepsilon$ ist d. h. die Differenzen $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)} - \hat{\mathfrak{x}}^{(m)}$ liegen alle in der Umgebung $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{0})$, wenn N die Menge der $\mathfrak{v}^{(i)}$ bedeutet.

Satz 5. *Die Topologien s-$T(\lambda/\alpha, \lambda^*)$ und s-$T(\lambda/\alpha, \overline{\alpha})$, ebenso k-$T(\lambda/\alpha, \lambda^*)$ und k-$T(\lambda/\alpha, \overline{\alpha})$ sind äquivalent.*

---

[13]) Da die $\mathfrak{w}^{(k)}$ nicht in $\overline{\alpha}$ liegen, kann man im einzelnen analog zu K 2, § 5. Hilfssatz 1 auf die Existenz einer schwach top. stetigen Linearfunktion $z_k(\mathfrak{u})$ schließen, die auf dem durch $\overline{\alpha}$ und die $\mathfrak{w}^{(i)}$ mit $i \neq k$ aufgespannten linearen Teilraum von λ^* verschwindet und auf der nicht darin enthaltenen Stelle $\mathfrak{w}^{(k)}$ den Wert $\mathfrak{w}^{(k)}\mathfrak{y}$ annimmt. $z_k(\mathfrak{u})$ wird nach dem Erweiterungssatz durch eine Stelle $\mathfrak{z}_k \in \lambda$ erzeugt.

Beweis. Es kommt wieder alles darauf an zu zeigen, daß jede durch eine begrenzte bzw. beschränkte und schwach kompakte Menge N aus λ^* definierte Umgebung $U_{(N,1)}$ (0) eine durch eine begrenzte bzw. beschränkte und schwach kompakte Menge D aus $\overline{\alpha}$ definierte Umgebung $U_{(D,1)}$ (0) enthält.

Nach § 1, Satz 2 können wir N von vornherein als komplett voraussetzen. Wir behaupten nun, daß der Durchschnitt D von N und $\overline{\alpha}$ die angegebene Eigenschaft hat.

Die Gesamtheit der zu allen Stellen von N orthogonalen Stellen aus λ bildet einen orthogonalabgeschlossenen Teilraum λ_N von λ. In dem Quotientenraum λ/λ_N mit den Elementen $\overline{\mathfrak{x}}$ wird durch

$$\|\overline{\mathfrak{x}}\| = \sup_{u \in N} |u\mathfrak{x}|, \quad \mathfrak{x} \text{ beliebig in } \overline{\mathfrak{x}}, \tag{10}$$

eine Metrik eingeführt. Aus $\|\overline{\mathfrak{x}}\| = 0$ folgt $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{0}$, auch die Dreiecksungleichung ist selbstverständlich. λ/λ_N braucht nicht vollständig bezüglich der Metrik zu sein.

Die Restklassen von λ/λ_N, in denen Elemente aus α liegen, bilden einen nicht notwendig im Sinne der Metrik abgeschlossenen Teilraum $\overline{\alpha}$ von λ/λ_N. Sei $\overline{\beta}$ die abgeschlossene Hülle von $\overline{\alpha}$.

Es sei $\mathfrak{x}^{(0)}$ eine Stelle aus λ. Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}$ nicht in $\overline{\beta}$ liegt. Nach dem Erweiterungssatz für lineare metrische Räume kann man eine auf ganz λ/λ_N erklärte Linearfunktion $v_0(\overline{\mathfrak{x}})$ vom Betrage 1 finden, die auf $\overline{\beta}$ verschwindet und auf $\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}$ den Wert $\|\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}\|$ annimmt. Setzt man $v_0(\mathfrak{x}) = v_0(\overline{\mathfrak{x}})$, wenn $\mathfrak{x}$ in der Restklasse $\overline{\mathfrak{x}}$ liegt, so erhält man eine auf ganz λ erklärte Linearfunktion, die der Ungleichung

$$|v_0(\mathfrak{x})| \leqq \|\overline{\mathfrak{x}}\| = \sup_{u \in N} |u\mathfrak{x}| \tag{11}$$

genügt, also im Sinne der s- bzw. k-Topologie auf ganz λ stetig ist. $v_0(\mathfrak{x})$ wird also durch eine Stelle $\mathfrak{v}^{(0)}$ aus λ^* erzeugt, die überdies noch in $\overline{\alpha}$ liegt, da $v_0(\mathfrak{x}) = 0$ für alle $\mathfrak{x}$ mit $\overline{\mathfrak{x}} \in \overline{\beta}$, also sicher für alle $\mathfrak{x} \in \alpha$. Nach Konstruktion ist

$$\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{x}^{(0)} = \sup_{u \in N} |u\mathfrak{x}^{(0)}|. \tag{12}$$

$\mathfrak{v}^{(0)}$ liegt in D, denn für $\mathfrak{y} \in N^+$ ist nach (11) $|\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{y}| \leqq 1$, also ist $\sup_{\mathfrak{v} \in N^+} |\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{y}| \leqq 1$, $\mathfrak{v}^{(0)}$ liegt daher nach § 1 in der kompletten Hülle von N, also auch in N.

Liegt $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$ nun in $U_{(D,1)}$ $(\hat{0})$, ist also $\sup_{\mathfrak{v} \in D} |\mathfrak{v}\mathfrak{x}^{(0)}| < 1$, so muß speziell $|\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{x}^{(0)}| < 1$ sein. Aus (12) folgt $\sup_{u \in N} |u\mathfrak{x}^{(0)}| < 1$, $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$ liegt daher auch in $U_{(N,1)}$ $(\hat{0})$.

Bleibt noch der Fall eines $\mathfrak{x}^{(0)}$ mit $\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}$ in $\overline{\beta}$ zu untersuchen. Wir zeigen, daß jedes solche $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$ in $U_{(N,1)}$ $(\hat{0})$ liegt.

Ist $\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}$ in $\overline{\beta}$, so ist $\overline{\mathfrak{x}}^{(0)}$ der metrische Limes von Stellen $\overline{\mathfrak{x}}^{(n)}$ aus $\overline{\alpha}$ d. h. es gibt eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} \in \alpha$, so daß

$$\|\overline{\mathfrak{x}}^{(0)} - \overline{\mathfrak{x}}^{(n)}\| = \sup_{u \in N} |u(\mathfrak{x}^{(0)} - \mathfrak{x}^{(n)})| \to 0.$$

Nun ist aber $\mathfrak{x}^{(0)} - \mathfrak{x}^{(n)}$ ein Element der Restklasse $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{x}^{(0)} - \mathfrak{x}^{(n)}$ in $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$, so daß $\sup_{u \in N} |u\mathfrak{y}^{(n)}| < \varepsilon$ ist, d. h.

$\inf_{\mathfrak{y} \in \hat{\mathfrak{x}}^{(0)}} \sup_{u \in N} |u\mathfrak{y}| = 0$, $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$ liegt in jedem $U_{\{N,\varepsilon\}}(\hat{0})$.

§ 4.

Homomorphe Abbildungen.

Es sei eine lineare Abbildung $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ des vollkommenen Raumes λ der $\mathfrak{x}$ in den vollkommenen Raum μ der $\mathfrak{y}$ gegeben. Mit $\nu_{\mathfrak{A}}$ bezeichnen wir den *Nullraum* von $\mathfrak{A}$, d. h. den Raum aller $\mathfrak{x}$ aus λ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$. Wie leicht zu sehen ist, wird durch die eindeutige und stetige Abbildung $\mathfrak{A}$ von λ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$ eine eineindeutige und top. stetige Abbildung von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$ erzeugt. Ist diese Abbildung auch umkehrbar stetig, so heißt $\mathfrak{A}$ ein *Homomorphismus von λ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$*.

Es gibt also *m-*, *s-*, *k*-Homomorphismen je nach der betrachteten Topologie.

Ist $\nu_{\mathfrak{A}}$ der nur aus 0 bestehende Raum, so sprechen wir von einem *Isomorphismus* von λ mit $\mathfrak{A}(\lambda)$[14]).

Satz 1. *$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein Homomorphismus, wenn $\mathfrak{A}$ top. stetig umkehrbar ist, d. h. wenn es zu jeder Umgebung $U(0)$ in λ eine Umgebung $V(0)$ in μ gibt, so daß jedes $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(0)$ ein Urbild $\mathfrak{x}$ in $U(0)$ besitzt.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ ist ein Homomorphismus, wenn die inverse Abbildung von $\mathfrak{A}(\lambda)$ auf $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ top. stetig ist, wenn also zu jeder Umgebung $U(\hat{0})$ in $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ eine Umgebung $V(0)$ in μ existiert, so daß die $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(0)$ ihr Urbild in $U(\hat{0})$ haben, d. h. aber, daß in der nach § 2 zu $U(\hat{0})$ gehörenden Umgebung $U(0)$ ein Urbild jedes $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(0)$ liegt.

Satz 2. *Die Abbildung $\mathfrak{A}$ von λ in μ ist dann und nur dann ein m-Homomorphismus, wenn $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen ist*[15]). *$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein m-Isomorphismus, wenn $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$ ist.*

Beweis. a) $\mathfrak{A}$ sei ein *m*-Homomorphismus. Die transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ bildet μ^* in λ^* ab. Sei $u^{(0)}$ eine *m*-Häufungsstelle von $\mathfrak{A}'(\mu^*)$. $u^{(0)}$ gehört nach dem Orthogonalraumsatz der orthogonalen Hülle von $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ an für jedes $\mathfrak{x} \in \lambda$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ [also $(\mathfrak{v}\mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{A}'\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{A}'(\mu^*)$]

---

[14]) In meinen früheren Arbeiten (vgl. z. B. K 4, S. 731) habe ich eine Matrix, die einen Isomorphismus vermittelt, als „top. nach unten beschränkt" bezeichnet.

[15]) Auch dieser Satz ist in allgemeinerer Fassung in D bewiesen worden (vgl. D, S. 120).

[16]) Vgl. KT § 6, Satz 3.

gilt also auch $\mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x} = 0$. Wir betrachten die Linearfunktion $v_0(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}$. Sie ist auf $\mathfrak{A}(\lambda)$ eindeutig erklärt. Sie ist dort auch m-top. stetig: Denn sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Gesamtheit aller $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}| < \varepsilon$ bildet die m-Umgebung $U_{\mathfrak{u}^{(0)},\varepsilon}(\mathfrak{o})$ in λ. Aus der m-top. stetigen Umkehrbarkeit von $\mathfrak{A}$ folgt, daß es ein $V(\mathfrak{o})$ in μ gibt, so daß für alle $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \in V(\mathfrak{o})$ ein $\tilde{\mathfrak{x}}$ in $U(\mathfrak{o})$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{x}}$ existiert. Für alle $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(\mathfrak{o})$ ist also $|v_0(\mathfrak{A}\mathfrak{x})| = |\mathfrak{u}^{(0)}\tilde{\mathfrak{x}}| < \varepsilon$.

Die Linearfunktion $v_0(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$ läßt sich nach dem Erweiterungssatz also auf ganz λ ausdehnen, wird daher durch eine Stelle $\mathfrak{v}^{(0)}$ aus λ^* erzeugt. Aus $\mathfrak{v}^{(0)}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}$ folgt aber wegen $\mathfrak{v}^{(0)}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{A})\mathfrak{x}$[16]), daß $\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{A} = \mathfrak{u}^{(0)}$ gilt, $\mathfrak{u}^{(0)}$ liegt also in $\mathfrak{A}'(\mu^*)$. $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ ist m-top. abgeschlossen, also orthogonalabgeschlossen.

b) $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ sei m-top. abgeschlossen. $\mathfrak{A}$ ist jedenfalls eine eineindeutige und m-top. stetige Abbildung von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$. Es muß also noch gezeigt werden, daß zu jedem $U(\hat{\mathfrak{o}})$ in $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ ein $V(\mathfrak{o})$ in μ gehört, so daß jedes $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(\mathfrak{o})$ Bild eines $\hat{\mathfrak{x}}$ aus $U(\hat{\mathfrak{o}})$ ist.

Nach § 3, Satz 3 kann $U(\hat{\mathfrak{o}})$ als eine Umgebung $U_{(N,\varepsilon)}(\hat{\mathfrak{o}})$ angesetzt werden, N eine finite Menge $(\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)})$ von Stellen aus $\nu_{\mathfrak{A}}$. Da $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen ist, ist $\bar{\nu}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}'(\mu^*)$. Die $\mathfrak{u}^{(i)}$ haben also die Gestalt $\mathfrak{u}^{(i)} = \mathfrak{v}^{(i)}\mathfrak{A}, \mathfrak{v}^{(i)} \in \mu^*$. N' sei die Menge der $\mathfrak{v}^{(i)}$, $V(\mathfrak{o})$ die Umgebung $V_{N',\varepsilon}(\mathfrak{o})$. Dann folgt aus $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \in V(\mathfrak{o})$, also $\sup_{\mathfrak{v}^{(i)} \in N'} |\mathfrak{v}^{(i)}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})| < \varepsilon$ offenbar $\sup_{\mathfrak{u}^{(i)} \in N} |\mathfrak{u}^{(i)}\mathfrak{x}| < \varepsilon$, d. h. $\hat{\mathfrak{x}} \in U(\hat{\mathfrak{o}})$.

c) Ist $\mathfrak{A}$ ein Isomorphismus, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ unlösbar, also der Orthogonalraum $\nu_{\mathfrak{A}}$ zu $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ gleich $\mathfrak{o}$, daher $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ als orthogonalabgeschlossener Teilraum gleich λ^*. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$, so ist $\nu_{\mathfrak{A}}$ gleich $\mathfrak{o}$, also $\mathfrak{A}$ ein Isomorphismus.

Eine Abbildung $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ von λ in μ heiße *beschränkt* bzw. *begrenzt* bzw. *schwach kompakt umkehrbar*, wenn jede beschränkte bzw. begrenzte bzw. beschränkte und schwach kompakte Menge des Bildraumes $\mathfrak{A}(\lambda)$ eine ebensolche Urbildmenge besitzt.

Satz 3. *Die Abbildung $\mathfrak{A}$ von λ in μ ist dann und nur dann ein s- bzw. k-Homomorphismus, wenn $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen und $\mathfrak{A}'$ begrenzt bzw. schwach kompakt umkehrbar ist.*

$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein s- bzw. k-Isomorphismus, wenn $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$ und $\mathfrak{A}'$ begrenzt bzw. schwach kompakt umkehrbar ist.

Wir führen den Beweis für einen k-Homomorphismus durch. Für s-Homomorphismen ist er analog zu führen.

a) Es sei $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen und $\mathfrak{A}'$ schwach kompakt umkehrbar. Dann schließt man wie unter b) im Beweise von Satz 2, wobei man nur die finite Menge N durch eine beschränkte schwach kompakte zu ersetzen hat und N' die nach Voraussetzung existierende ebensolche Urbildmenge von N ist. Man erhält so, daß $\mathfrak{A}$ ein k-Homomorphismus ist.

b) Es sei $\mathfrak{A}$ ein k-Homomorphismus von λ in den Teilraum $\mathfrak{A}(\lambda)$ von μ. Wie unter a) im Beweise von Satz 2 zeigt man, daß $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen ist. Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{A}'$ schwach kompakt umkehrbar ist.

Sei also M eine beschränkte schwach kompakte Menge von Stellen $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{A}'(\mu^*)$. Wir haben eine beschränkte schwach kompakte Menge N von Stellen $\mathfrak{v} \in \mu^*$ anzugeben, so daß $\mathfrak{A}'(N)$ die Menge M umfaßt. Da $\mathfrak{A}$ ein k-Homomorphismus ist, gibt es nach Satz 1 zu der Umgebung $U(\mathfrak{o})$ aller $\mathfrak{x} \in \lambda$ mit $(\mathfrak{x})_M < 1$ eine Umgebung $V(\mathfrak{o})$ in μ, definiert durch $(\mathfrak{y})_A < 1$, A eine beschränkte schwach kompakte Menge in μ^*, so daß alle $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus $V(\mathfrak{o})$ Urbilder $\mathfrak{x}$ in $U(\mathfrak{o})$ haben. Ist aber $(\mathfrak{x})_M < 1$ für ein Urbild von $\mathfrak{y}$, so gilt auch für jedes andere Urbild $\mathfrak{x}'$ $(\mathfrak{x}')_M < 1$, denn $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'$ ist orthogonal zu allen $\mathfrak{u} \in M$, da M in $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ liegt, $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ aber orthogonal zum Nullraum $\nu^{\mathfrak{A}}$ ist. Also folgt aus $(\mathfrak{A}\mathfrak{x})_A < 1$ stets $(\mathfrak{x})_M < 1$. Wie leicht zu sehen, gilt dann auch

(13) Aus $(\mathfrak{A}\mathfrak{x})_A \leqq 1$ folgt stets $(\mathfrak{x})_M \leqq 1$.

Diese Beziehung bleibt richtig, wenn wir A vergrößern, also $V(\mathfrak{o})$ verkleinern. Wir können also A von vornherein als normal und komplett voraussetzen (vgl. § 1, Satz 2). Wir betrachten nun die Bildmenge $\mathfrak{A}'(A) = B$. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir $B \supseteq M$ zeigen können [17]).

Nach § 1, Satz 4 ist B beschränkt, schwach kompakt und k-top. abgeschlossen. Wir nehmen an, daß ein $\mathfrak{u}^{(0)}$ aus M nicht in B liegt. Wegen der Abgeschlossenheit von B gibt es dann eine abgeschlossene und normale k-Umgebung $(\mathfrak{u}^{(0)} - \mathfrak{u})_P \leqq 1$, die keinen Punkt von B enthält. Wir bilden jetzt aus B die Menge C aller Stellen $\mathfrak{c}$, die den abgeschlossenen Umgebungen $(\mathfrak{b} - \mathfrak{u})_P \leqq \frac{1}{2}$ angehören, $\mathfrak{b}$ beliebig aus B. Für jedes $\mathfrak{c}$ aus C gilt $(\mathfrak{u}^{(0)} - \mathfrak{c})_P \geqq (\mathfrak{u}^{(0)} - \mathfrak{b})_P - (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})_P \geqq \frac{1}{2}$, $\mathfrak{u}^{(0)}$ liegt also auch nicht in C.

C ist ein absolut konvexer k-Körper, der $\mathfrak{o}$ als inneren Punkt enthält.

Mit $\mathfrak{c}^{(1)} = \mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{u}^{(1)}$, $\mathfrak{c}^{(2)} = \mathfrak{b}^{(2)} + \mathfrak{u}^{(2)}$, $(\mathfrak{u}^{(i)})_P \leqq \frac{1}{2}$, $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$ in B, liegt auch $t_1\mathfrak{c}^{(1)} + t_2\mathfrak{c}^{(2)} = (t_1\mathfrak{b}^{(1)} + t_2\mathfrak{b}^{(2)}) + (t_1\mathfrak{u}^{(1)} + t_2\mathfrak{u}^{(2)})$ $(|t_1| + |t_2| = 1)$ in C, denn B und die Umgebung $(\mathfrak{u})_P \leqq \frac{1}{2}$ sind absolut konvex, also ist C absolut konvex. Da A als normale Menge $\mathfrak{o}$ enthält, enthält B auch $\mathfrak{o}$, also umfaßt C ganz $(\mathfrak{u})_P \leqq \frac{1}{2}$, $\mathfrak{o}$ ist innerer Punkt von C. Nach § 2 können wir nun das Minkowskische Funktional $k(\mathfrak{u})$ für den Körper C bilden. Die Umgebung $(\mathfrak{u}^{(0)} - \mathfrak{u})_P < \frac{1}{2}$ enthält keinen Punkt von C, also gibt es eine Zahl ϑ, $0 < \vartheta < 1$, so daß $\vartheta\mathfrak{u}^{(0)}$ ebenfalls nicht in C liegt. Es ist daher $c = k(\mathfrak{u}^{(0)}) > 1$.

Wenden wir § 2, Satz 3 auf C und $\frac{1}{c}\mathfrak{u}^{(0)}$ an, so erhalten wir eine Stelle $\mathfrak{x}^{(0)}$ in λ mit $\mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}^{(0)} = c$ und $|\mathfrak{c}\mathfrak{x}^{(0)}| \leqq 1$ für alle $\mathfrak{c} \in C$. Für dieses

[17]) Die Methode des folgenden Beweises geht auf S. Mazur zurück, vgl. S. Kaczmarz u. H. Steinhaus, l. c. S. 33 ff.

$\mathfrak{x}^{(0)}$ wäre wegen $C \supseteq B$ einerseits $(\mathfrak{x}^{(0)})_B = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(0)})_A \leqq 1$, andererseits wegen $\mathfrak{u}^{(0)}$ in M $(\mathfrak{x}^{(0)})_M \geqq |\mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}^{(0)}| = c > 1$, was (13) widerspricht. —

Um die Tragweite von Satz 4 zu beurteilen, betrachten wir den vollkommenen Raum σ_r, $1 < r < \infty$, der Stellen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $\sum_i |x_i|^r < \infty$. Nach K 4, § 1 fällt die k-Topologie mit der Metrik von σ_r zusammen. Also ist jede beschränkte Menge schwach kompakt und eine schwach kompakt umkehrbare Abbildung ist ein starker (metrischer) Homomorphismus. Also erhalten wir für Abbildungen von σ_r in sich das (bekannte) Resultat: *Ist $\mathfrak{A}$ ein starker Homomorphismus von σ_r in sich, so hat $\mathfrak{A}$ einen abgeschlossenen Bildraum und $\mathfrak{A}'$ ist ebenfalls ein starker Homomorphismus mit abgeschlossenem Bildraum.*

Wie ein Beispiel in § 5 zeigen wird, braucht bei einem Homomorphismus der Bildraum nicht abgeschlossen zu sein. Für die m-Topologie ist sogar die Frage noch offen, ob der Bildraum eines m-Isomorphismus top. abgeschlossen ist. Für die s- und k-Topologie ist dies in K 4, § 5, Satz 2 bewiesen worden mit Hilfe der topologischen Vollständigkeit der vollkommenen Räume in bezug auf diese Topologien. Nimmt man die Abgeschlossenheitsbedingung noch hinzu, so geht Satz 2 über in

Satz 4. *Eine Abbildung $\mathfrak{A}$ von λ in μ ist dann und nur dann ein m-Homomorphismus mit orthogonalabgeschlossenem Bildraum, wenn $\mathfrak{A}'$ diese Eigenschaften hat.*

$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein m-Isomorphismus mit orthogonalabgeschlossenem Bildraum, wenn $\mathfrak{A}'$ ein m-Homomorphismus von μ^* auf ganz λ^* ist.

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ ein m-Homomorphismus, so ist nach der einen Hälfte von § 4, Satz 2 $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ orthogonalabgeschlossen. Ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ überdies orthogonalabgeschlossen, so ist $\mathfrak{A}'$ nach der anderen Hälfte des Satzes ein m-Homomorphismus. —

Ob ein Satz 4 entsprechender Satz auch für die s- und k-Homomorphismen gilt, ist ein noch ungelöstes Problem. Wir werden ein Teilresultat für Isomorphismen beweisen.

Satz 5. *Jeder m-Isomorphismus $\mathfrak{A}$ von λ in μ ist beschränkt und schwach kompakt umkehrbar.*

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{A}(M)$ beschränkt, aber M nicht. Dann gibt es ein $\mathfrak{u}^{(0)}$ in λ^* und eine Folge $\mathfrak{x}^{(i)}$ aus M mit $|\mathfrak{u}^{(0)}\mathfrak{x}^{(i)}| \geqq i$. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$, also gibt es ein $\mathfrak{v}^{(0)}$ mit $\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{A} = \mathfrak{u}^{(0)}$. Die Ungleichungen $|(\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{A})\mathfrak{x}^{(i)}| = |\mathfrak{v}^{(0)}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(i)})| \geqq i$ bedeuten aber, daß $\mathfrak{A}(M)$ nicht beschränkt sein kann.

b) Da $\mathfrak{A}$ ein m-Isomorphismus ist, hat jede schwach konvergente Folge in $\mathfrak{A}(\lambda)$ eine ebensolche Urbildfolge, also hat nach a) auch jede beschränkte schwach kompakte Menge ein ebensolches Urbild.

Satz 6. *$\mathfrak{A}$ sei ein m-Isomorphismus mit orthogonalabgeschlossenem Bildraum oder ein k-Isomorphismus. Dann ist $\mathfrak{A}'$ ein m- und k-Homomorphismus von μ^* auf ganz λ^*.*

Ist umgekehrt $\mathfrak{A}'$ ein m- oder k-Homomorphismus von μ^* auf ganz λ^*, so ist $\mathfrak{A}$ ein m-Isomorphismus mit orthogonalabgeschlossenem Bildraum.

Folgerung. *Ein m-Homomorphismus von μ^* auf ganz λ^* ist ein k-Homomorphismus und umgekehrt, die beiden Begriffe fallen zusammen.*

Beweis. a) $\mathfrak{A}$ sei ein k-Isomorphismus. $\mathfrak{A}$ hat nach K 4 § 5, Satz 2 einen orthogonalabgeschlossenen Bildraum. Ferner ist $\mathfrak{A}'$ (μ^*) orthogonalabgeschlossen nach Satz 3, also nach Satz 2 $\mathfrak{A}$ in jedem Falle ein m-Isomorphismus mit orthogonalabgeschlossenem Bildraum. Nach Satz 5 ist $\mathfrak{A}$ überdies schwach kompakt umkehrbar, nach Satz 2 und 3 ist $\mathfrak{A}'$ ein m- und k-Homomorphismus auf ganz λ^*.

b) Ist $\mathfrak{A}'$ ein m- oder k-Homomorphismus von μ^* auf ganz λ^*, so ist nach Satz 2 jedenfalls $\mathfrak{A}$ ein m-Isomorphismus, der nach Satz 3 und 4 aber auch einen orthogonalabgeschlossenen Bildraum besitzt.

Als Anwendung von Satz 6 geben wir einen neuen einfacheren Beweis für das Reziprokentheorem in σ_∞ (vgl. K 3).

$\mathfrak{A}$ sei ein starker Isomorphismus von σ_∞ in sich. Wir behaupten, daß dann $\mathfrak{A}'$ ein starker Homomorphismus ist.

Nach K 3, Satz 3 ist $\mathfrak{A}$ ein s-Isomorphismus. Nach K 4, § 1 fallen in σ_∞ die s- und k-Topologie zusammen, $\mathfrak{A}$ ist daher auch ein k-Isomorphismus, nach Satz 6 also auch $\mathfrak{A}'$ ein k-Homomorphismus. Da in s_∞ der Grenzstellensatz gilt, fallen in $\sigma_\infty^* = \sigma_1$ die k- und st-Topologie zusammen, $\mathfrak{A}'$ ist ein st-Homomorphismus.

K 3, Satz 5[18]) ergibt, daß $\nu_{\mathfrak{A}'}$ einen Komplementärraum hat. Wie in K 3, S. 232 schließt man auf die Existenz des Komplementärraumes von $\mathfrak{A}(\sigma_\infty)$, woraus sich das Reziprokentheorem ergibt.

§ 5.

Ein Beispiel.

$\varphi\varphi$ ist der in den finiten Raum φ permutierbare Raum aller Stellen $\xi = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik} e_{ik} = (x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, x_{22}, \ldots | \ldots | \ldots)$ mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Koordinaten, $\varphi\omega + \omega\varphi$ besteht aus allen Stellen $\eta =$
$(\ldots | \ldots | \ldots y_{-2-2}, y_{-2-1} | \ldots y_{-1-2}, y_{-1-1}, || y_{11}, y_{12}, \ldots | y_{21}, y_{22} \ldots | \ldots | \ldots)$,
wobei die linke Hälfte $\sum_{i,k=1}^{\infty} y_{-i-k} e_{-i-k}$ in $\varphi\omega$ liegt, also nur für endlich viele $-i$ Koordinaten $y_{-i-k} \neq 0$ besitzt, die rechte $\sum_{i,k=1}^{\infty} y_{ik} e_{ik}$ in $\omega\varphi$, d. h. zu jedem i nur endlich viele von Null verschiedene y_{ik} besitzt.

Der duale Raum zu $\varphi\varphi$ ist $\omega\omega$, der in ω permutierbar ist, zu $\varphi\omega + \omega\varphi$ ist der in $\varphi\omega + \omega\varphi$ permutierbare Raum $\omega\varphi + \varphi\omega$ dual.

[18]) Daß $\mathfrak{A}'$ beschränkt umkehrbar ist, bedeutet nach Satz 1 in σ_1, daß $\mathfrak{A}'$ ein st-Homomorphismus ist.

Wir betrachten die Abbildung $\mathfrak{A}$ aus H, § 7, die der Stelle $\mathfrak{x} = \sum x_{ik} e_{ik}$ aus $\varphi\varphi$ die Stelle $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum x_{ik}(e_{-i-k} + e_{ik})$ zuordnet. Der Bildraum $\mu = \mathfrak{A}(\varphi\varphi)$ besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der $e_{-i-k} + e_{ik}$. In H wurde bewiesen, daß μ orthogonalabgeschlossen ist, $\bar{\mu}$ besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der $e_{-i-k} - e_{ik}$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung $\mathfrak{A}'$ von $\omega\varphi + \varphi\omega$ in $\omega\omega$ die Form $\mathfrak{A}'\mathfrak{v} = \mathfrak{A}'\left(\sum_{i,k=1}^{\infty} v_{-i-k} e_{-i-k} + \sum_{i,k=1}^{\infty} v_{ik} e_{ik}\right) = \sum_{i,k=1}^{\infty} (v_{-i-k} + v_{ik})\, e_{ik}$ hat. Die beiden in $\omega\varphi$ bzw. $\varphi\omega$ liegenden Hälften der Stellen aus $\omega\varphi + \varphi\omega$ werden also als Stellen von $\omega\omega$ aufgefaßt und als solche addiert. Der Nullraum $\nu_{\mathfrak{A}'}$ ist gleich $\bar{\mu}$.

Satz 1. *$\mathfrak{A}'$ ist ein m-, s- und k-Homomorphismus von $\omega\varphi + \varphi\omega$ auf einen nichtabgeschlossenen in $\omega\omega$ dichten Teilraum von $\omega\omega$.*

Beweis. Wir beweisen nur, daß $\mathfrak{A}'$ ein s- und k-Homomorphismus ist, in ähnlicher Weise ergibt sich, daß $\mathfrak{A}'$ ein m-Homomorphismus ist.

In den konvergenzfreien Räumen ist jede beschränkte Menge schwach kompakt und begrenzt[19]), die s-, k- und st-Topologie fallen also zusammen.

Nach KT, § 15, Satz 3 lassen sich die beschränkten Mengen M in $\varphi\omega$ folgendermaßen charakterisieren: Zu jeder beschränkten Menge M von Stellen $\mathfrak{x} = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik} e_{ik}$ gibt es einen Index n_0, ferner nichtnegative Zahlen R_{ik}, die für $i \geqq n_0$ sämtlich verschwinden, für $i < n_0$ beliebig sind, so daß M nur $\mathfrak{x}$ mit $|x_{ik}| \leqq R_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots$, enthält. M enthält also nur Stellen, deren Koordinaten in den ersten n_0 Abteilungen von Null verschieden und dem Betrage nach beschränkt sind.

Zu jeder beschränkten Menge M in $\omega\varphi$ gibt es eine Folge ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ und dazu nichtnegative Zahlen R_{ik}, die bis auf die Einschränkungen $R_{ik} = 0$ für $k \geqq n_i$, $i = 1, 2, \ldots$, beliebig sind, so daß für jedes $\mathfrak{x} = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik} e_{ik}$ aus M $|x_{ik}| \leqq R_{ik}$ gilt. M enthält also nur Stellen, die in jeder Abteilung endlich viele (nämlich $n_i - 1$ in der i-ten Abteilung) von Null verschiedene dem Betrage nach beschränkte Koordinaten besitzen.

Eine Menge in $\varphi\omega + \omega\varphi$ ist beschränkt, wenn die Hälften der Stellen aus M je eine beschränkte Menge in $\varphi\omega$ bzw. $\omega\varphi$ bilden.

Jede schwache Umgebung in $\omega\varphi + \varphi\omega$ umfaßt also eine Umgebung $U(\mathfrak{o})$ folgender Art: $U(\mathfrak{o})$ besteht aus allen $\mathfrak{v} = \sum_{i,k=1}^{\infty} v_{-i-k} e_{-i-k} + \sum_{i,k=1}^{\infty} v_{ik} e_{ik}$, die die Bedingung

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |v_{-i-k}| R_{-i-k} + \sum_{i,k=1}^{\infty} |v_{ik}| R_{ik} < 1 \tag{14}$$

[19]) Vgl. K 4, S. 723.

erfüllen, wobei die $R_{-i-k} = 0$ sind für $i \geqq n_0$ und die $R_{ik} = 0$ sind für $k \geqq n_i$.

Wir haben zu zeigen, daß es zu $U(\mathfrak{o})$ eine Umgebung $V(\mathfrak{o})$ in $\omega\omega$ gibt, so daß zu jedem $\mathfrak{u} = \mathfrak{A}'\mathfrak{v}$ aus $V(\mathfrak{o})$ ein Urbild $\mathfrak{v}$ in $U(\mathfrak{o})$ existiert. Da eine beschränkte Menge in φ aus Stellen besteht, die nur auf endlich vielen festen Koordinaten von Null verschieden und dem Betrage nach beschränkt sind, erhalten wir eine Umgebung $V(\mathfrak{o})$ in $\omega\omega$, wenn wir $V(\mathfrak{o})$ gleich der Menge aller $\mathfrak{u} = \sum_{i,k=1}^{\infty} u_{ik}\mathfrak{e}_{ik}$ setzen mit

$$\sum_{i=1}^{n_0-1}\sum_{k=1}^{\infty} |u_{ik}|\, R_{ik} < 1, \tag{15}$$

wobei R_{ik}, n_0 die zu $U(\mathfrak{o})$ gehörigen Zahlen sind. Nur endlich viele der R_{ik} mit $i < n_0$ sind ja von Null verschieden.

Sei nun $\mathfrak{u} = \mathfrak{A}'\mathfrak{v}$ aus $V(\mathfrak{o})$ gegeben, $\mathfrak{u}$ hat die Gestalt

$$\mathfrak{u} = \sum_{i,k=1}^{\infty} u_{ik}\mathfrak{e}_{ik} = \sum_{i,k=1}^{\infty} (v_{-i-k} + v_{ik})\,\mathfrak{e}_{ik} = \sum_{i,k=1}^{\infty} v_{-i-k}\,\mathfrak{e}_{ik} + \sum_{i,k=1}^{\infty} v_{ik}\mathfrak{e}_{ik},$$

wobei der erste Summand eine Stelle aus $\omega\varphi$, der zweite eine aus $\varphi\omega$ ist. Es gibt also ein $m_0 \geqq n_0$, so daß $v_{ik} = 0$ ist für $i \geqq m_0$ und alle k.

Wir geben nun eine Stelle $\mathfrak{v}' = \sum v''_{-i-k}\mathfrak{e}_{-i-k} + \sum v'''_{ik}\mathfrak{e}_{ik} = \mathfrak{v}'' + \mathfrak{v}'''$ in $U(\mathfrak{o})$ an mit $\mathfrak{A}'\mathfrak{v}' = \mathfrak{u}$. Wir zerlegen dazu die Menge der Indizes (i,k), $i,k = 1,2,\ldots$, von $\mathfrak{u}$ in zwei fremde Teilmengen. Zur ersten, N_1, gehören alle Paare (i,k) mit $i < m_0$, ausgenommen im Fall $m_0 > n_0$ diejenigen Paare mit $i = n_0, \ldots, m_0 - 1$ und $k = 1, \ldots, n_i - 1$. N_2 sei die Komplementärmenge. Wir setzen $\mathfrak{v}'''$ gleich der Stelle, deren Koordinaten mit Indizes aus N_1 mit denen von $\mathfrak{u}$ übereinstimmen, sonst verschwinden, $\mathfrak{v}''$ sei die Stelle mit $v''_{-i-k} = u_{ik}$ für (i,k) aus N_2, $v''_{-i-k} = 0$ sonst. $\mathfrak{v}''$ ist eine Stelle aus $\omega\varphi$, deren Koordinaten v''_{-i-k} verschwinden für $i < n_0$, für die also der linke Summand in (14) gleich $\sum_{i,k=1}^{\infty} |v''_{-i-k}| R_{-i-k} = 0$ ist; für $\mathfrak{v}'''$ ergibt der rechte Summand von (14) gerade die linke Seite von (15). Da $\mathfrak{u}$, also auch $\mathfrak{v}'''$, als Stelle von $\omega\omega$ aufgefaßt, in $V(\mathfrak{o})$ liegt, gilt (15), also $\sum_{i,k=1}^{\infty} |v'''_{ik}| R_{ik} < 1$, daher liegt $\mathfrak{v}'$ in $U(\mathfrak{o})$. Schließlich ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{v}' = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{A}'$ ist ein Homomorphismus.

Wie sofort zu sehen, ist jedes $\mathfrak{e}_{ik}$ in $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$, also jede finite Stelle, also ist $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$ in $\omega\omega$ dicht (jede Stelle ist ja Limes ihrer Abschnitte, KT, § 3, Satz 2). Andererseits ist nicht jede Stelle aus $\omega\omega$, z. B. nicht $\sum_{i,k=1}^{\infty} \mathfrak{e}_{ik}$ in $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$, also ist der Bildraum von $\mathfrak{A}'$ nicht abgeschlossen.

Satz 2. *Der Quotientenraum $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ des Nullraumes $\bar{\mu}$ von $\mathfrak{A}'$ ist in der m-, s- und k-Topologie nicht vollständig.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}'$ ein Homomorphismus ist, ist $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ mit $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$ isomorph, also nicht vollständig.

Wir können dies auch direkt einsehen: Wir bilden die Folge $\mathfrak{v}^{(n)} = \sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{e}_{ik}$ in $\omega\varphi + \varphi\omega$. Die Folge der Restklassen $\hat{\mathfrak{v}}^{(n)}$ in $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ ist nach § 3, Satz 5 s-konvergent, wenn für jede beschränkte Menge N aus $\bar{\bar{\mu}} = \mu \sup_{\mathfrak{y} \in N} |\mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{y}|$ konvergiert. Nun ist nach H, § 7 μ zu φ ähnlich, jede beschränkte Menge in μ ist endlichdimensional, also ist $\hat{\mathfrak{v}}^{(n)}$ dann und nur dann s-konvergent, wenn $\mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{y}$ für jedes $\mathfrak{y}$ aus μ konvergiert. μ hat die Stellen $\mathfrak{e}_{-j-l} + \mathfrak{e}_{jl}$ als Basis. Es ist aber $\mathfrak{v}^{(n)}(\mathfrak{e}_{-j-l} + \mathfrak{e}_{jl}) = 2$ für $n \geqq j, l$, also ist $\hat{\mathfrak{v}}^{(n)}$ konvergent. Die in $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ im Sinne jeder der drei Topologien konvergente Folge $\hat{\mathfrak{v}}^{(n)}$ hat aber dort keinen Limes, denn für kein $\mathfrak{v}$ aus $\omega\varphi + \varphi\omega$ ist $\hat{\mathfrak{v}} - \hat{\mathfrak{v}}^{(n)}$ gegen $\hat{\mathfrak{o}}$ konvergent, da für ein geeignet gewähltes $\mathfrak{e}_{-j-l} + \mathfrak{e}_{jl}$ stets $\left(\mathfrak{v} - \sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{e}_{ik}\right)(\mathfrak{e}_{-j-l} + \mathfrak{e}_{jl}) = -2$ wird für $n \geqq j, l$. Man braucht dazu nur j, l so zu wählen, daß $v_{-j-l} = v_{jl} = 0$ ist.

Satz 3. *Der s-Homomorphismus $\mathfrak{A}'$ ist nicht beschränkt (also auch nicht begrenzt und schwach kompakt) umkehrbar, dagegen ist $\mathfrak{A}$ beschränkt umkehrbar, aber kein s-Isomorphismus.*

Beweis. a) Wann eine Menge M in $\varphi\omega + \omega\varphi$ beschränkt ist, haben wir im Beweis von Satz 1 auseinandergesetzt. Es ist leicht zu sehen, daß zu jedem $\mathfrak{A}'(M)$ Koordinaten existieren, die für alle Elemente von $\mathfrak{A}'(M)$ verschwinden, die Menge aller $\mathfrak{e}_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots$, aus $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$, die in $\omega\omega$ beschränkt ist, kann daher kein beschränktes Urbild haben.

b) $\mathfrak{A}$ ist, wie in H, § 7 bewiesen wurde, eine eineindeutige und in beiden Richtungen limestreue Abbildung; da $\mathfrak{A}'(\omega\varphi + \varphi\omega)$ nicht abgeschlossen ist, kann $\mathfrak{A}$ nach § 4, Satz 2 und 3 aber kein s-Isomorphismus sein, andererseits ist $\mathfrak{A}$ nach Satz 1 und § 4, Satz 3 aber begrenzt, also beschränkt umkehrbar.

Schließlich bringen wir ein in § 3 angekündigtes Gegenbeispiel:

Satz 4. *Es gibt auf dem orthogonalabgeschlossenen Teilraum μ von $\varphi\omega + \varphi\omega$ schwach stetige Linearfunktionen, die nicht durch eine Stelle aus $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ erzeugt werden.*

Beweis. μ ist nach H, § 7 zu φ schwach stetig isomorph, die auf ganz μ erklärten schwach stetigen Linearfunktionen bilden also einen Raum vom Typus $\omega\omega$, die schwach top. stetigen Linearfunktionen werden nach § 3, Satz 2 durch den Raum der Stellen aus $(\omega\varphi + \varphi\omega)/\bar{\mu}$ gebildet, der nach Satz 2 aber nur einem Teilraum von $\omega\omega$ isomorph ist.

(Eingegangen am 25. November 1943.)

Über einige Klassen nichtlinearer Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Von

Karl Maruhn in Jena.

Einleitung.

Bei den drei klassischen Randwertaufgaben der Potentialtheorie werden Lösungen der LAPLACEschen Gleichung $\Delta u = 0$ gesucht, die im Innern eines gegebenen Bereichs T regulär sind und bei Annäherung an den Rand S die Bedingungen $u = f(\sigma)$, $\frac{\partial u}{\partial n} = f(\sigma)$ oder $\frac{\partial n}{\partial n} + h(\sigma) u = f(\sigma)$ erfüllen, unter $f(\sigma)$ und $h(\sigma)$ zwei auf S erklärte Funktionen verstanden. Diese (und einige weitere, in der Literatur weniger ausführlich behandelte) Randbedingungen sind bezüglich der gesuchten Funktion bzw. deren Ableitungen linear; nur wenige Arbeiten beschäftigen sich dagegen mit allgemeineren Problemen.

Die meines Wissens einzige hinsichtlich Existenz und Unität erschöpfende Untersuchung eines nichtlinearen potentialtheoretischen Randwertproblems verdanken wir CARLEMAN[1]); er bestimmt eine in T außer im Punkte (ξ, η, ζ), reguläre, positive, bei Annäherung an S samt $\frac{\partial u}{\partial n}$ stetige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die sich in (ξ, η, ζ) wie $\frac{1}{r}$ $(r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)$ verhält und die bei Annäherung an S die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = F(u)$ erfüllt. Die für nichtnegative u erklärte Funktion $F(u)$ ist dabei einer Reihe einschränkender Voraussetzungen unterworfen — Untersuchungen von MASOTTI[2]) betreffen (auch für die Poissonsche Gleichung gültige) Unitätssätze für Randbedingungen der sehr allgemeinen Gestalt $F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0$ (im Raum) und $F\left(s, u, \mu(s) \frac{\partial u}{\partial n} + \nu(s) \frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0$ bzw. $F\left(s, \frac{\partial u}{\partial n}, \mu(s) u + \nu(s) \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s}\right) = 0$

---

[1]) T. CARLEMANN, Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$. Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 35—43.

[2]) A. MASOTTI, Un teorema di univocità relativo all'equazione di Poisson. Atti della Reale Acad. naz. Lincei, Rendic., VI s., **15**, S. 630—634; Teoremi di univocità per le soluzioni della equazione di Poisson soddisfacenti speziali condizioni al contorno. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei **85** (1932), S. 393—409.

(in der Ebene), unter $\mu(s)$, $\nu(s)$ zwei auf S gegebene Funktionen verstanden. Auf Existenzfragen wird dabei nicht eingegangen.

In der folgenden Untersuchung werden einige Klassen nichtlinearer Probleme behandelt, die sich durch die bei den klassischen Aufgaben üblichen Lösungsansätze in Gestalt gewisser Flächenpotentiale auf nichtlineare Integralgleichungen zurückführen lassen. Es handelt sich dabei um Existenz und Unität von „kleinen" Lösungen bei den drei Typen von Randbedingungen $u = \mathfrak{B}\{u(\sigma)\}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$ und $\frac{\partial u}{\partial n} + h(\sigma)\, u = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$. Die Ausdrücke $\mathfrak{B}$ bezeichnen gewisse Funktionaloperationen, in denen $u, u_x, \ldots$ von höherer als erster Ordnung oder aber mit einem kleinen Parameter behaftet auftreten. Hierin ist die Aufgabe enthalten, Lösungen in der Nachbarschaft von Lösungen der klassischen Probleme zu suchen. In den Beweisen spielt naturgemäß das Verfahren der sukzessiven Approximationen eine entscheidende Rolle. Von besonderem Interesse sind die „Verzweigungsfälle", wo erst eine eingehende Diskussion der sogenannten „Verzweigungsgleichungen" nötig ist, um über Existenz und Anzahl reeller Lösungen etwas aussagen zu können. — Die Überlegungen werden in drei Dimensionen durchgeführt, lassen sich aber ohne Schwierigkeit auf die Ebene übertragen.

Die auf dem Rande vorgegebenen Funktionen bzw. Funktionaloperationen setzen wir hier als durchweg stetig (eventuell auch einer Lipschitz-Bedingung genügend) voraus. Einige der folgenden Sätze dürften aber auch dann gültig bleiben, wenn eine endliche Anzahl von Ausnahmepunkten zugelassen wird, in denen diese Funktionen nicht notwendig stetig, ja nicht einmal beschränkt zu sein brauchen. Auf diese Dinge soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

I. Randbedingungen der Gestalt $u(\sigma) = \mathfrak{B}\{u(\sigma)\}$.

1. *Inneres Problem.* Es sei T ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche S[3]) begrenztes, beschränktes räumliches Gebiet und es bezeichne $\mathfrak{B}\{u(\sigma)\}$ irgendeine stetige Funktionaloperation über $u(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} u(x,y,z)$ (σ ein Punkt auf S), d. h. eine $u(\sigma)$ für $0 \leqq |u| \leqq \mathfrak{Q}^*$ zugeordnete, auf S erklärte und dort stetige Funktion. Ist in einem

[3]) Allgemeiner kann S der Klasse $A\,h$ angehören, d. h. die Richtungskosinus der Normalen genügen auf S gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung (kurz L-Bedingung). — Man sagt allgemein von einer auf S erklärten Funktion $\Phi(\sigma)$, daß sie dort gleichmäßig einer L-Bedingung genüge, wenn für alle auf S gelegenen Punktepaare σ_1, σ_2 mit dem Abstand $d_{12} < d^*$ eine Abschätzung der Form $|\Phi(\sigma_1) - \Phi(\sigma_2)| < D\, d_{12}^{\lambda}$ besteht, unter d^*, D und λ ($0 < \lambda < 1$) drei von der speziellen Wahl von σ_1 und σ_2 unabhängige Konstanten verstanden. Für die Konstante D wird später öfters die Bezeichnung $|\Phi(\sigma)|_\lambda$ gebraucht werden.

jeden Randpunkt σ

$$|u(\sigma)| \leqq \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{Q}^*, \tag{1}$$

so soll

$$|\mathfrak{B}\{u(\sigma)|\} \leqq \bar{A}(C) + A(C,\mathfrak{Q})\,\mathfrak{Q} \tag{2}$$

gelten, unter C eine hinreichend kleine positive Konstante und unter $\bar{A}(C)$ bzw. $A(C,\mathfrak{Q})$ für $0 \leqq C \leqq C^*$ bzw. für $0 \leqq C \leqq C^*$ und $0 \leqq \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{Q}^*$ erklärte stetige positive, nirgends abnehmende Funktionen[3a]) mit $\bar{A} \to 0$ und $A \to 0$ für $C \to 0$ bzw. $C^2 + \mathfrak{Q}^2 \to 0$ verstanden. Ist ferner $\bar{u}(\sigma)$ eine weitere wie $u(\sigma)$ beschaffene Funktion auf S mit $|\bar{u}| \leqq \mathfrak{Q}$, $|u - \bar{u}| \leqq \bar{\mathfrak{Q}} \leqq 2\,\mathfrak{Q}$, so möge

$$|\mathfrak{B}\{u(\sigma)\} - \mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma)\}| \leqq B(C,\mathfrak{Q})\,\bar{\mathfrak{Q}} \tag{3}$$

sein, wobei B eine wie A beschaffene Funktion in $0 \leqq C \leqq C^*$ und $0 \leqq \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{Q}^*$ bedeutet.

Wir suchen nunmehr eine in T reguläre, in $T+S$ stetige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die bei Annäherung an einen jeden Punkt σ von S der Bedingung

$$u(\sigma) = \mathfrak{B}\{u(\sigma)\} \tag{4}$$

genügt.

Falls Lösungen dieser Aufgabe existieren, so nehmen sie gewiß bei Annäherung an S eine stetige Wertfolge an; sie sind demgemäß nach bekannten Sätzen als Potentiale von Doppelbelegungen darstellbar. Wir setzen daher

$$u(x,y,z) = \int_S \chi(\sigma') \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r_{P\sigma'}}\right) d\sigma' = -\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}}\, d\sigma' \text{ [4])}, \tag{5}$$

$$(r^2_{P\sigma'} = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2),$$

unter n' die im Integrationspunkt $\sigma' = (\xi,\eta,\zeta)$ auf S errichtete Innennormale verstanden, und erhalten nach Einsetzen von (5) in (4) für $\chi(\sigma)$ die nichtlineare Integralgleichung

$$\chi(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\, d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{B}\left\{2\pi\chi(\sigma) - \right. \tag{6}$$

$$\left. - \int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\, d\sigma' \right\} \text{ [5])}.$$

[3a]) Für $A(C,\mathfrak{Q})$ bedeutet das, daß diese Funktion für festgehaltenes C in Abhängigkeit von $\mathfrak{Q}$ und für festgehaltenes $\mathfrak{Q}$ in Abhängigkeit von C nicht abnimmt.

[4]) In (5) ist in $\cos(r_{P\sigma'}, n')$ $r_{P\sigma'}$ vom Punkte $P = (x,y,z)$ nach $\sigma' = (\xi,\eta,\zeta)$ gerichtet. Die später verwendete Bezeichnung $r_{\sigma'P}$ bedeutet die umgekehrte Richtung.

[5]) Entsprechend der Vereinbarung in Anm. [4]) weist jetzt $r_{\sigma\sigma'}$ von σ nach σ' und später $r_{\sigma'\sigma}$ von σ' nach σ.

Es liegt nun nahe, die Auflösung von (6) in der gleichen Weise wie E. SCHMIDT[6]) und LICHTENSTEIN[7]) durch sukzessive Approximationen vorzunehmen, was hier auf die Lösung einer unendlichen Folge erster Randwertprobleme hinausläuft.

Da bekanntlich die zum Innenproblem der ersten Randwertaufgabe gehörige homogene Integralgleichung

$$\chi(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma' = 0 \tag{7}$$

keine Nullösung besitzt, können wir der Reihe nach die Funktionen $\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma), \ldots$ aus den Integralgleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
&\chi_1(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_S \chi_1(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{0\}^8),\\
&\chi_2(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_S \chi_2(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\left\{2\pi\chi_1(\sigma)-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\int_S \chi_1(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma'\right\} = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{u^{(1)}(\sigma)\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

bestimmen. Wir wollen nun zeigen, daß für alle k die Ungleichheiten

$$\text{a)}\quad |u^{(k)}(\sigma)| = \left|2\pi\chi_k(\sigma)-\int_S \chi_k(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma'\right| < \Omega^*,$$

$$\text{b)}\quad |\chi_k(\sigma)-\chi_{k-1}(\sigma)| \leqq q\,\mathrm{Max}\,|\chi_{k-1}(\sigma)-\chi_{k-2}(\sigma)|, \qquad (q<1$$

bestehen, wenn nur die in der Abschätzung (2) auftretende Konstante C genügend klein ist. Die Ungleichung a) lehrt alsdann, daß die Approximationen beliebig weit getrieben werden können, während b) die Konvergenz sichert.

Zum Beweise von a) beachten wir zunächst, daß bekanntlich, unter $F(\sigma)$ eine auf S stetige Funktion verstanden, die Integralgleichung

$$\mathbf{X}(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_S \mathbf{X}(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r_{\sigma\sigma'}^2}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}F(\sigma) \tag{9}$$

trotz des singulären Kerns der FREDHOLMschen Theorie zugänglich ist, daß die Lösung $\mathbf{X}(\sigma)$ sich auf S stetig verhält und dort einer Ungleichung der Form

$$|\mathbf{X}(\sigma)| < c_1\,\mathrm{Max}\,|F(\sigma)| \tag{10}$$

(c_1 eine von σ unabhängige Konstante, wie später auch $c_2, c_3 \ldots$) ge-

---

[6]) Vgl. E. SCHMIDT, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Math. Ann. 65 (1908), S. 370—399.

[7]) Vgl. L. LICHTENSTEIN, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin 1931.

[8]) $\mathfrak{B}\{0\}$ entsteht, wenn in $\mathfrak{B}\{u\}$ die Funktion $u \equiv 0$ eingesetzt wird.

nügt. Ferner gilt mit

$$U(x,y,z) = \int_S \mathfrak{X}(\sigma') \frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}} d\sigma' \tag{11}$$

in $T+S$

$$|U(x,y,z)| < c_2 \operatorname{Max} |\mathfrak{X}(\sigma)|^{9}). \tag{12}$$

Wir betrachten nun die Gleichung[10])

$$\tau = c_1 [\bar{A}(C) + A(C, c_2\tau) \cdot c_2\tau]. \tag{13}$$

Die Funktion

$$\Phi(\tau) = c_1 \bar{A}(C) - \tau + c_1 c_2 \tau A(C, c_2\tau) \tag{14}$$

ist für $\tau = c_1 \bar{A}(C)$ positiv. Nehmen wir jetzt C als so klein an, daß

$$c_1 \bar{A}(C) < \frac{1}{2c_2} \Omega^* \text{ und } A(C, 2c_1 c_2 \bar{A}(C)) < \frac{1}{2c_1 c_2} \tag{15}$$

ausfällt, so ist $\Phi(2c_1 \bar{A}(C)) < 0$; in dem Intervall $c_1 \bar{A}(C) < \tau < 2c_1 \bar{A}(C)$ liegen daher gewiß Nullstellen von $\Phi(\tau)$, deren kleinste mit $\bar{\tau}$ bezeichnet sei. Es ist $c_1 \bar{A}(C) < \bar{\tau} < 2c_1 \bar{A}(C) < \frac{\Omega^*}{c_2}$ und somit $\lim_{C \to 0} \bar{\tau} = 0$.

Mit Rücksicht auf (10), (11) und (12) folgt jetzt aus (2) und (8)

$$\begin{cases} |\chi_1| < c_1 \bar{A}(C) < \bar{\tau}, \\ |\chi_2| < c_1 [\bar{A}(C) + A(C, c_2\bar{\tau}) \cdot c_2\bar{\tau}] = \bar{\tau}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{16}$$

und also wegen (12), da ja

$$\bar{\tau} < \frac{\Omega^*}{c_2} \tag{17}$$

ist, die Behauptung a).

Aus (8) ergibt sich weiter

$$\chi_k(\sigma) - \chi_{k-1}(\sigma) - \frac{1}{2\pi} \int_S (\chi_k(\sigma') - \chi_{k-1}(\sigma')) \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r_{\sigma\sigma'}} d\sigma' = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\mathfrak{B}\{u^{(k-1)}(\sigma)\} - \mathfrak{B}\{u^{(k-2)}(\sigma)\}];$$

wegen (12) und

$$u^{(k-1)}(x,y,z) - u^{(k-2)}(x,y,z) = -\int_S (\chi_{k-1}(\sigma') - \chi_{k-2}(\sigma')) \frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}} d\sigma' \text{ ist}$$

in $T+S$

$$|u^{(k-1)}(x,y,z) - u^{(k-2)}(x,y,z)| < c_2 \operatorname{Max} |\chi_{k-1}(\sigma) - \chi_{k-2}(\sigma)|.$$

---

[9]) Vgl. hierzu etwa J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen. I. Abhandlung. Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 602—640. Die Formel (12) folgt sogleich aus der dort (S. 627) für alle P bewiesenen Beschränktheit von $\int_S \left| \frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}} \right| d\sigma'$.

[10]) Die folgende Beweismethode findet sich z. B. schon l. c.[7]), S. 6 f.

Mit Rücksicht auf (3) haben wir daher

$$(19)\quad |\mathfrak{B}\{u^{(k-1)}(\sigma)\}-\mathfrak{B}\{u^{(k-2)}(\sigma)\}| \leqq c_2 B(C, c_2\bar{\tau})\,\mathrm{Max}\,|\chi_{k-1}(\sigma)-\chi_{k-2}(\sigma)|$$

und bekommen unter Beachtung von (10) auf Grund von (18)

$$(20)\quad |\chi_k(\sigma)-\chi_{k-1}(\sigma)| \leqq c_1 c_2 B(C, c_2\bar{\tau})\,\mathrm{Max}\,|\chi_{k-1}(\sigma)-\chi_{k-2}(\sigma)|.$$

Wählen wir jetzt C und damit $\bar{\tau}$ so klein, daß

$$(21)\quad c_1 c_2 B(C, c_2\bar{\tau}) \leqq q < 1$$

ausfällt, so folgt aus (20) die Behauptung b).

Damit ist die Existenz einer auf S stetigen Lösung $\chi(\sigma)$ der Gleichung (6),

$$\chi(\sigma) = \chi_1(\sigma)+(\chi_2(\sigma)-\chi_1(\sigma))+\cdots,$$

und damit einer Lösung unseres Randwertproblems bewiesen. Mit Rücksicht auf (16) gilt

$$(22)\quad |\chi(\sigma)| \leqq \bar{\tau},$$

wobei $\bar{\tau}$ den Ungleichheiten (17) und (21) genügt.

Wir zeigen jetzt noch, daß es höchstens eine Lösung der Gestalt (5) geben kann, bei der die Schranke des Belegungsbetrages Ungleichheiten befriedigt, die zu (17) und (21) analog sind.

Es sei demgegenüber $\hat{\chi}(\sigma)$ eine weitere Lösung von (6) mit

$$(23)\quad |\hat{\chi}(\sigma)| \leqq \hat{\tau} < \frac{\Omega^*}{c_2},\ c_1 c_2 B(C, c_2\tau) \leqq q < 1;$$

wegen (8) und

$$(24)\quad \hat{\chi}(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_S \hat{\chi}(\sigma)\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\left\{2\pi\hat{\chi}(\sigma)-\int_S \hat{\chi}(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma'\right\}$$

folgt, wenn $\tau^* = \mathrm{Max}(\bar{\tau}, \hat{\tau})$ gesetzt wird, mit Hinblick auf (3) der Reihe nach

$$(25)\quad \begin{cases} |\chi_2(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)| \leqq c_1 c_2 B(C, c_2\tau^*)\,\mathrm{Max}|\chi_1(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)|, \\ |\chi_3(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)| \leqq c_1 c_2 B(C, c_2\tau^*)\,\mathrm{Max}|\chi_2(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (12), (23) und (21) ist in $T+S$

$$|\hat{u}(x,y,z)| = \left|\int_S \hat{\chi}(\sigma')\frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}}\,d\sigma'\right| < \Omega^*$$

und

$$(26)\quad |\chi_k(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)| \leqq q^{k-1}\,\mathrm{Max}\,|\chi_1(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)|,$$

d. h.

$$(27)\quad \lim_{k\to\infty} |\chi_k(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)| = |\chi(\sigma)-\hat{\chi}(\sigma)| = 0.$$

Es gibt also genau eine Lösung der Gestalt (5) unseres Randwertproblems, deren Belegung Bedingungen der Form (23) genügt; wie schon früher bemerkt, ist diese Lösung überhaupt die einzige.

2. *Äußeres Problem.* Es bezeichne T_a das von S begrenzte, nicht beschränkte, zu T komplementäre Gebiet; wir suchen nunmehr eine in T_a+S stetige Lösung von $\Delta u = 0$, die sich in T_a (einschließlich des Unendlichen) regulär verhält[11]) und bei Annäherung an S die Bedingung (4) erfüllt.

Da auch hier eine jede Lösung stetige Randwerte besitzt, so kann sie, wie die Theorie der ersten Randwertaufgabe lehrt, in der Gestalt

$$u(x,y,z) = -\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{P\sigma'}, n')}{r^2_{P\sigma'}} d\sigma' + N, \tag{28}$$

(N konstant, n' die in das Innere des zu T_a komplementären Gebietes T weisende Normale zu S in σ') dargestellt werden; die Randbedingung (4) führt somit für $\chi(\sigma)$ auf die nichtlineare Integralgleichung

$$\chi(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}} d\sigma' = \tag{29}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[-N+\mathfrak{B}\left\{-2\pi\chi(\sigma)-\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}} d\sigma' + N\right\}\right].$$

Die homogene Integralgleichung

$$\chi(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}} d\sigma' = 0 \tag{30}$$

hat bekanntlich eine einzige Lösung $\bar{\chi}(\sigma)$, nämlich die Konstante; sie sei gemäß der Forderung $\int_S [\bar{\chi}(\sigma)]^2 d\sigma = 1$ normiert und lautet daher $\bar{\chi}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{J_s}}$, unter J_s den Flächeninhalt von S verstanden.

Um das Verfahren der sukzessiven Approximation ähnlich wie in 1. durchführen zu können, müssen wir die Integralgleichung (29) derart umformen, daß die linke Seite keine Nullösungen mehr besitzt. Dies gelingt, wenn wir uns nach E. Schmidt der sogenannten „Kernzerspaltung" bedienen[12]).

Es bezeichne $\bar{\nu}(\sigma)$ die gemäß $\int_S [\bar{\nu}(\sigma)]^2 d\sigma' = 1$ normierte Lösung der zu (30) adjungierten Integralgleichung

$$\nu(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \nu(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r^2_{\sigma'\sigma}} d\sigma' = 0^{13}), \tag{31}$$

---

[11]) Wir benutzen hier die Definition von J. Plemelj (Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911, S. 4). Hiernach wird im Raume eine Potentialfunktion $u(x,y,z)$ im Unendlichen regulär genannt, wenn $\lim_{R\to\infty} u$ existiert und $R^2\frac{\partial u}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial u}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial u}{\partial z}$ für $R\to\infty$ ($R^2 = x^2+y^2+z^2$) verschwinden. (Wie sich übrigens zeigen läßt, folgt die erste Bedingung aus der zweiten). — In der Ebene genügt die Existenz von $\lim_{R\to\infty} u$.

[12]) Vgl. l. c. [6]), S. 386—389.

[13]) Bezüglich der Bezeichnung $r_{\sigma'\sigma}$ vgl. Anm. 5).

(n die in das Innere von T weisende Normale in σ). Setzen wir jetzt

$$L_1(\sigma,\sigma') = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}} + \bar{\nu}(\sigma)\bar{\chi}(\sigma'), \tag{32}$$

so hat die Gleichung

$$\chi(\sigma) + \int_S \chi(\sigma')\, L_1(\sigma,\sigma')\, d\sigma' = 0 \tag{33}$$

keine Nullösung mehr.

Wegen

$$\chi(\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\, d\sigma' = \chi(\sigma) + \int_S \chi(\sigma')\, L_1(\sigma,\sigma')\, d\sigma' - r_1\nu(\sigma) \tag{34}$$

mit

$$= \int_S \chi(\sigma')\bar{\chi}(\sigma')\, d\sigma' \tag{35}$$

läßt sich nunmehr die fundamentale Integralgleichung (29) auf die Form

$$\chi(\sigma) + \int_S \chi(\sigma')\, L_1(\sigma,\sigma')\, d\sigma' = \tag{36}$$

$$= r_1\bar{\nu}(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\left[-N + \mathfrak{B}\left\{-2\pi\bar{\chi}(\sigma) - \int_S \chi(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\, d\sigma' + N\right\}\right]$$

bringen, und man erkennt leicht, daß jetzt (36) mit Hilfe sukzessiver Näherungen gelöst werden kann, da diese die im vorigen Abschnitt mit a) und b) bezeichneten Forderungen erfüllen, wenn nur neben C diesmal auch $|r_1|$ und $|N|$ hinreichend klein sind.

In diese Lösung gehen nun die zunächst noch freien Parameter r_1 nnd N ein; einer von ihnen muß zur Befriedigung der Beziehung (35) herangezogen werden. Schreiben wir daher unsere Lösung ausführlich $\chi(\sigma; r_1, N)$, so ist die Glelchung

$$r_1 = \int_S \chi(\sigma; r_1, N)\bar{\chi}(\sigma)\, d\sigma \tag{37}$$

nach r_1 oder N aufzulösen.

Man prüft zunächst leicht durch Einsetzen nach, daß wegen (32) die Integralgleichung

$$\chi(\sigma) + \int_S \chi(\sigma')\, L_1(\sigma,\sigma')\, d\sigma' = r_1\bar{\nu}(\sigma) \tag{38}$$

durch

$$r_1\bar{\chi}(\sigma) = \frac{r_1}{\sqrt{J_s}} \tag{39}$$

befriedigt wird. (39) ist also unter Berücksichtigung von (36) der mit r_1 behaftete Bestandteil der ersten Näherung $\chi_1(\sigma)$. Dieser Ausdruck ergibt, zur Bestimmung der zweiten Näherung rechter Hand in (36) in $\mathfrak{B}$ eingesetzt, dort keinen Beitrag, da ja $\bar{\chi}$ die Gleichung (30) löst. Ebenso liegen die Dinge bei allen weiteren Näherungen; es ist daher (39) der einzige r_1 enthaltende Bestandteil der Lösung $\chi(\sigma; r_1, N)$ von (36).

Es sei $M_1(\sigma,\sigma')$ die zu $L_1(\sigma,\sigma')$ gehörige FREDHOLMsche Resolvente. Wie man leicht nachprüft[14]), ist

$$\int_S \bar{\chi}(\sigma) M_1(\sigma,\sigma')\, d\sigma = \bar{\chi}(\sigma') - \bar{\nu}(\sigma'). \tag{40}$$

Schreiben wir nun (36) in der Gestalt

$$\begin{aligned}\chi(\sigma) = {} & \frac{r_1}{\sqrt{J_s}} - \frac{1}{2\pi}\left[-N + \mathfrak{B}\left\{-2\pi\chi(\sigma) - \int_S \chi(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma' + N\right\}\right] - \\ & - \frac{N}{2\pi}\int_S M_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' + \frac{1}{2\pi}\int_S M_1(\sigma,\sigma')\,\mathfrak{B}\left\{-2\pi\chi(\sigma') - \right. \\ & \left. - \int_S \chi(\sigma'')\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma''},n'')}{r^2_{\sigma'\sigma''}}\,d\sigma'' + N\right\} d\sigma'\end{aligned} \tag{41}$$

und setzen in (37) ein, so reduziert sich diese Gleichung wegen (40) auf

$$\begin{aligned}\int_S \Big[-N + \mathfrak{B}\Big\{-2\pi\chi(\sigma;r_1,N) - \\ - \int_S \chi(\sigma';r_1,N)\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma' + N\Big\}\Big]\bar{\nu}(\sigma)\,d\sigma = 0.\end{aligned} \tag{42}$$

Wie wir schon sahen, enthält $\mathfrak{B}$ und damit (42) in Wirklichkeit r_1 nicht mehr. Dagegen sind wir in der Lage, den Parameter N so zu bestimmen, daß (42) oder, was dasselbe ist, (37) erfüllt ist. In der Tat ist ja nach bekannten Sätzen $\int_S \bar{\nu}(\sigma)\,d\sigma \neq 0$; daher kann, wie man etwa durch sukzessive Approximationen zeigen kann, (42) für hinreichend kleine Werte von C nach N aufgelöst werden, und es ergibt sich

$$N = \frac{1}{\int_S \bar{\nu}(\sigma)\,d\sigma}\left[\int_S \mathfrak{B}\{0\}\,\bar{\nu}(\sigma)\,d\sigma + \mathfrak{R}\right], \quad \left(\frac{\mathfrak{R}}{C} \to 0 \text{ für } C \to 0\right). \tag{43}$$

In erster Näherung ist somit N gleich der in der Theorie der ersten Randwertaufgabe auftretenden NEUMANNschen Konstanten. Da N mit $C \to 0$ verschwindet, so ist die für die Konvergenz der sukzessiven Näherungen wesentliche Voraussetzung eines genügend kleinen N für hinreichend kleines C erfüllbar. Der Parameter r_1 ist beliebig wählbar und kann demnach ohne weiteres als hinreichend klein angenommen werden.

Die Funktion $\chi(\sigma)$ ist also nur bis auf die additive Konstante $\frac{r_1}{\sqrt{J_s}}$ bestimmt. Da aber für alle Punkte in T_a $\int_S \frac{\cos(r_{P\sigma'},n']}{r^2_{P\sigma'}} = 0$ ist, so besitzt nichtdestoweniger unser Randwertproblem genau eine Lösung der Gestalt (28) und also überhaupt genau eine Lösung.

---

[14]) Vgl. l. c.[7]), S. 23—24.

3. *Lösungen in der Nachbarschaft von Lösungen der ersten Randwertaufgabe.* Es sei $f(\sigma)$ eine auf S erklärte stetige Funktion, und es bezeichne $u_0(x,y,z)$ diejenige in $T+S$ bzw. T_a+S stetige, in T bzw. T_a reguläre Potentialfunktion, für die bei Annäherung an S

$$u_0(\sigma) = f(\sigma) \tag{44}$$

gilt.

Wir suchen eine in $T+S$ bzw. T_a+S stetige, in T bzw. T_a reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die bei Annäherung an S die Bedingung

$$u(\sigma) = f(\sigma)+\mathfrak{B}\{u(\sigma)\} \tag{45}$$

erfüllt und mit $C \to 0$ gegen u_0 konvergiert. Unter $\mathfrak{B}$ verstehen wir wieder eine stetige Funktionaloperation, von der wir diesmal folgendes voraussetzen: Es sei für $|u(\sigma)| < U_0 (U_0 \geqq \operatorname{Max}|f(\sigma)|+\Omega^* = \operatorname{Max}|u_0(x,y,z)|+ + \Omega^*, \Omega^* > 0)$

$$|\mathfrak{B}\{u(\sigma)\}| < A_1(C), \tag{46}$$

unter C eine gewisse hinreichend kleine Konstante verstanden. Ist weiter $\bar{u}(\sigma)$ eine wie $u(\sigma)$ beschaffene Funktion auf S mit $|\bar{u}(\sigma)| < U_0$ und $|u(\sigma)-\bar{u}(\sigma)| \leqq \bar{\Omega}$, so gelte

$$|\mathfrak{B}\{u(\sigma)\}-\mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma)\}| \leqq B_1(C)\bar{\Omega}, \tag{47}$$

wobei A_1 und B_1 wie die in (2) eingeführte Funktion $\bar{A}$ beschaffen sind.

Wird nun

$$u(x,y,z) = u_0(x,y,z)+u_1(x,y,z) \tag{48}$$

geschrieben, so transformiert sich (45) in die Randbedingung

$$u_1(\sigma) = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma)\}+\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma)\} \tag{49}$$

mit

$$\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma)\} = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma)+u_1(\sigma)\}-\mathfrak{B}\{u_0(\sigma)\} \tag{50}$$

für die unbekannte Funktion u_1. Wegen (47) ist mit $|u_1(\sigma)| \leqq \Omega \leqq \Omega^*$ und $|u_1(\sigma)-\bar{u}_1(\sigma)| \leqq \bar{\Omega}$ ($\bar{u}_1 = \bar{u}-u_0$ eine wie u_1 beschaffene Funktion)

$$|\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma)\}| \leqq B_1(C)\Omega, \quad |\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma)\}-\mathfrak{B}_1\{\bar{u}_1(\sigma)\}| \leqq B_1(C)\bar{\Omega}. \tag{51}$$

Das Problem ist somit wegen (46), (49) und (51) auf den in 1. und 2. behandelten Fall zurückgeführt.

4. *Eine Verallgemeinerung.* In Verallgemeinerung der vorangehenden Untersuchungen wollen wir kurz die durch die Bedingung

$$u(\sigma) = \mathfrak{B}\{u(\sigma),\ u_x(\sigma),\ u_y(\sigma),\ u_z(\sigma)\}\ ^{15}),$$
$$\left(u_x(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} u_x(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) \tag{52}$$

charakterisierte Randwertaufgabe betrachten. Wir suchen diesmal eine in T reguläre, in $T+S$ samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Potentialfunktion und müssen, über unsere früheren Annahmen hinaus-

[15]) Vgl. hierzu l. c.[9]), S. 634.

gehend, $\mathfrak{B}$ als eine Funktionaloperation über $u(\sigma)$, $u_x(\sigma)$, $u_y(\sigma)$, $u_z(\sigma)$ auffassen, die auf S stetige, einer L-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung besitzt[16]). Auch hier kann u wieder in der Gestalt (5) bzw. (28) angesetzt werden. Die Funktion $\chi(\sigma)$ wird nun ebenfalls stetige, einer L-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung besitzen. Hieraus ergibt sich aber als eine weitere Voraussetzung über $\mathfrak{B}$, daß zur Bildung von $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}$ nicht die Ableitungen zweiter Ordnung von u herangezogen werden dürfen; für deren Existenz wären bekanntlich stetige, einer L-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung von $\chi(\sigma)$ erforderlich. Es darf also beispielsweise $\mathfrak{B}$ keine Funktion von u_x, u_y, u_z sein, dagegen sind etwa Ausdrücke der Form $\int_S u_x(\sigma')\, K(\sigma,\sigma')\, d\sigma$ ($K(\sigma,\sigma')$ hat stetige, einer L-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung) zugelassen.

Wie man leicht erkennt, läßt sich auch jetzt auf Grund bekannter Hilfssätze[17]) über das Potential der Doppelbelegung die Integralgleichung des Problems

$$(53)\quad \chi(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma')\,\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'}, n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$$

bzw. die analoge Gleichung für das Außenproblem durch sukzessive Approximationen behandeln.

II. Randbedingungen der Gestalt $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$.

1. Inneres Problem. Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ für $|u(\sigma)|$, $|u_x(\sigma)|$, ..., $|u_x(\sigma)|_\lambda$, ... $< \Omega^*$[18]) eine stetige, einer L-Bedingung genügende Funktionaloperation über $u(\sigma)$, $u_x(\sigma)$, $u_y(\sigma)$, $u_z(\sigma)$, $\left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right)$ mit

$$(54)\quad u(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} u(x,y,z),\ u_x(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} u_x(x,y,z), \ldots.$$

---

[16]) Das ist so zu verstehen: Nach L. Lichtenstein, (Bemerkungen über die Flächen mit stetiger Normale. Bull. Intern. Acad. Polon. 1928, S. 7—13) läßt sich S von einer endlichen Anzahl von Flächenstücken $S^{(1)}, \ldots, S^{(m)}$ „dachziegelartig" überdecken, so daß jeder Punkt auf S im Innern mindestens eines $S^{(\varrho)}$ liegt und daß die Gleichung eines jeden $S^{(\varrho)}$ in der Gestalt $z = z(x,y)$ oder $x = x(y,z)$ oder $y = y(z,x)$ geschrieben werden kann. Da S hier stetig gekrümmt ist, besitzen z oder x oder y stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung. — Liegt nun etwa σ auf $S^{(\varrho)}$ mit der Gleichung $z = z(x,y)$, so kann dort $\mathfrak{B}$ als Funktion von x und y allein aufgefaßt werden: $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}}(x,y)$. Unsere Voraussetzung besagt dann, daß $\frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial y}$ in dem Bereiche, der durch Projektion von $S^{(\varrho)}$ auf die x,y-Ebene entsteht, stetig sind und dort gleichmäßig einer L-Bedingung genügen.

[17]) Vgl. l. c.[9]), insbesondere S. 634.

[18]) Bezüglich der Bezeichnung $|u_x(\sigma)|_\lambda$ vgl. die Bemerkungen in Fußnote[3]).

Ist diesmal

$$(55) \qquad |u(\sigma)|, |u_x(\sigma)|, \ldots, |u_x(\sigma)|_\lambda, \ldots \leqq \mathfrak{Q}, \quad (0 < \mathfrak{Q} < \mathfrak{Q}^*),$$

so soll

$$(56) \qquad |\mathfrak{B}|, |\mathfrak{B}_\lambda| \leqq \bar{A}(C) + A(C, \mathfrak{Q})\,\mathfrak{Q}$$

gelten, unter C wieder eine hinreichend kleine positive Konstante verstanden. Ist ferner $\bar{u}$ eine wie u beschaffene Funktion mit

$$(57) \qquad |\bar{u}(\sigma)|, |\bar{u}_x(\sigma)|, \ldots, |\bar{u}_x(\sigma)|_\lambda, \ldots \leqq \mathfrak{Q},$$
$$|u(\sigma) - \bar{u}(\sigma)|, |u_x(\sigma) - \bar{u}_x(\sigma)|, \ldots, |u_x(\sigma) - \bar{u}_x(\sigma)|_\lambda, \ldots \leqq \bar{\mathfrak{Q}} \leqq 2\,\mathfrak{Q},$$

so sei

$$(58) \qquad |\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma), \bar{u}_x(\sigma), \ldots\}|,$$
$$|\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma), \bar{u}_x(\sigma), \ldots\}|_\lambda \leqq B(C, \mathfrak{Q})\,\bar{\mathfrak{Q}},$$

wobei $\bar{A}$, A und B wie in I, 1. beschaffene Funktionen darstellen.

Es wird nun eine in T reguläre, in $T+S$ samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung von $\Delta u = 0$ gesucht, die bei Annäherung an einen jeden Randpunkt σ von S der Bedingung

$$(59) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$$

genügt (n die Innennormale, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} \frac{\partial u}{\partial n}$).

Falls Lösungen dieser Aufgabe existieren, so nehmen die Randwerte ihrer Normalableitung auf S eine stetige Wertefolge an; eine jede Lösung ist daher, bekannten Sätzen über die zweite Randwertaufgabe zufolge, als Potential einer einfachen Schicht darstellbar; überdies muß für die Lösungsfunktion

$$(60) \qquad \int_S \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}\, d\sigma = 0$$

erfüllt sein.

Wir setzen also

$$(61) \qquad u(x,y,z) = \int_S \nu(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}}\, d\sigma' \text{ [19]}$$

und erhalten nach Einsetzen in (59) für $\nu(\sigma)$ die nichtlineare Integralgleichung

$$(62) \qquad \nu(\sigma) + \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}\, d\sigma' = -\frac{1}{2\pi}\, \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}$$

(n die Innennormale im Punkte σ)

mit

$$(63) \qquad u(\sigma) = \int_S \nu(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\, d\sigma', \quad u_x(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \int_S \nu(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}}\, d\sigma', \ldots \text{ [20]}.$$

---

[19]) Zur Bezeichnung $r_{\sigma' P}$ bzw. $r_{\sigma'\sigma}$ vgl. die Fußnoten [4]) und [5]).

[20]) Die Grenzwerte $u_x(\sigma), \ldots$ existieren gewiß, wenn $\nu(\sigma)$ auf S einer L-Bedingung genügt. Vgl. hierzu L. LICHTENSTEIN, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV Ber. d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. 82 (1930), S. 265—344, insbes. S. 288 f.

Wir beachten nun, daß die homogene Gleichung

$$\nu(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \nu(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma},n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}\,d\sigma' = 0 \tag{64}$$

mit der Gleichung (31) identisch ist und somit $\bar{\nu}(\sigma)$ als einzige (normierte) Lösung besitzt; die adjungierte Gleichung [vgl. (30)]

$$\chi(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \chi(\sigma')\frac{\cos(r_{\sigma\sigma'},n')}{r^2_{\sigma\sigma'}}\,d\sigma' = 0 \tag{65}$$

hat die Lösung $\bar{\chi}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{J_s}}$.

Setzen wir jetzt

$$L_1(\sigma,\sigma') = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma},n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}+\bar{\nu}(\sigma')\bar{\chi}(\sigma), \tag{66}$$

so hat die Integralgleichung

$$\nu(\sigma)+\int_S \nu(\sigma')\,L_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' = 0 \tag{67}$$

keine Lösung mehr.

Die Gleichung (62) läßt sich nunmehr auf die Form

$$\nu(\sigma)+\int_S \nu(\sigma')\,L_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' = r_1\bar{\chi}(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{u(\sigma),u_x(\sigma),\ldots\} \tag{68}$$

mit

$$r_1 = \int_S \bar{\nu}(\sigma)\,\nu(\sigma)\,d\sigma \tag{69}$$

bringen; auf Grund von (56) und (58) existiert, wie wir sogleich zeigen werden, genau eine mit $C^3+r_1^3$ verschwindende Lösung, falls C und $|r_1|$ genügend klein sind.

Wir bestimmen die Näherungen der Reihe nach aus folgenden Integralgleichungen

$$\begin{cases} \nu_1(\sigma)+\int_S \nu_1(\sigma')\,L_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' = r_1\bar{\chi}(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{0,0,0,0\}, \\ \nu_2(\sigma)+\int_S \nu_2(\sigma')\,L_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' = r_1\bar{\chi}(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\mathfrak{B}\{u^{(1)}(\sigma),u_x^{(1)}(\sigma),\ldots\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{70}$$

mit

$$u^{(k)}(\sigma) = \int_S \nu_k(\sigma')\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\,d\sigma',\quad u_x^{(k)}(\sigma) = \lim_{(x,y,z)\to\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\int_S \nu_k(\sigma')\frac{1}{r_{\sigma'P}}\,d\sigma',\ldots. \tag{71}$$

Ist $F(\sigma)$ eine auf S stetige, dort einer L-Bedingung genügende Funktion mit

$$|F(\sigma)|,\ |F(\sigma)|_1 \leqq \mathfrak{k}, \tag{72}$$

so gelten für die Lösung $\mathbf{N}(\sigma)$ der Integralgleichung

$$\mathbf{N}(\sigma)+\int_S \mathbf{N}(\sigma')\,L_1(\sigma,\sigma')\,d\sigma' = F(\sigma) \tag{73}$$

die Ungleichungen

$$|\mathbf{N}(\sigma')|,\ |\mathbf{N}(\sigma)|_\lambda < c_3 \mathfrak{k}; \tag{74}$$

nach bekannten Sätzen[21]) haben wir weiter für die Funktion $U(x,y,z) = \int_S \mathbf{N}(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}} d\sigma'$ in $T+S$

$$|U|, |U_x|, \ldots, |U_x|_\lambda, \ldots < c_4 \operatorname{Max}(|\mathbf{N}(\sigma)|, |\mathbf{N}(\sigma)|_\lambda) < c_3 c_4 \mathfrak{k}. \tag{75}$$

Es sei nun

$$|r_1 \bar{\chi}(\sigma)| + \frac{1}{2\pi} \bar{A}(C) \leqq D; \tag{76}$$

wir betrachten die Gleichung

$$\tau = c_3 \left(D + \frac{1}{2\pi} A(C, c_4 \tau)\, c_4 \tau \right). \tag{77}$$

Die Funktion

$$\Psi(\tau) = c_3 D - \tau + \frac{1}{2\pi} c_3 A(C, c_4 \tau)\, c_4 \tau \tag{78}$$

ist für $\tau = c_3 D$ positiv. Wählen wir jetzt C und $|r_1|$ und damit D so klein, daß $c_3 D < \frac{1}{2 c_4} \Omega^*$ und $\frac{1}{2\pi} A(C, 2 c_3 c_4 D) < \frac{1}{2 c_3 c_4}$ ausfällt, so ist $\Psi(2 c_3 D) < 0$; in dem Intervall $c_3 D < \tau < 2 c_3 D \left(2 c_3 D < \frac{\Omega^*}{c_4} \right)$ liegen gewiß Nullstellen von $\Psi(\tau)$, deren kleinste $\bar{\tau}$ heiße. Es ist $c_3 D < \bar{\tau} < 2 c_3 D < \frac{\Omega^*}{c_4}$ und $\lim_{D \to 0} \bar{\tau} = 0$.

Mit Rücksicht auf (56), (70), (72), (73), und (74) haben wir

$$\begin{cases} |\nu_1(\sigma)|,\ |\nu_1(\sigma)|_\lambda < c_3 D < \bar{\tau}, \\ |\nu_2(\sigma)|,\ |\nu_2(\sigma)|_\lambda < c_3 \left(D + \frac{1}{2\pi} A(C, c_4 \bar{\tau})\, c_4 \bar{\tau} \right) = \bar{\tau}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{79}$$

Wegen (75) und $\bar{\tau} < \frac{\Omega^*}{c_4}$ gilt somit in $T+S$ für alle n

$$|u^{(n)}(\sigma)|,\ |u_x^{(n)}(\sigma)|, \ldots, |u_x^{(n)}(\sigma)|_\lambda, \ldots < \Omega^*. \tag{80}$$

Weiterhin findet sich mit Rücksicht auf (58)

$$|\nu_k - \nu_{k-1}|, |\nu_k - \nu_{k-1}|_\lambda < \frac{1}{2\pi} c_3 c_4 B(C, c_4 \bar{\tau}) \operatorname{Max}(|\nu_{k-1} - \nu_{k-2}|, |\nu_{k-1} - \nu_{k-2}|_\lambda). \tag{81}$$

Wählen wir daher C und $|r_1|$ und damit D so klein, daß $\frac{1}{2\pi} c_3 c_4 B(C, c_4 \bar{\tau}) \leqq q < 1$ ausfällt, so konvergiert die Folge der ν_k. — Wie in I, 1. erkennt man schließlich auch die Unität der Lösung von (68).

Die Lösung $\nu = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) + \ldots$, die wir ausführlich $\nu(\sigma; r_1)$ schreiben wollen, ist auf S stetig und genügt dort einer L-Bedingung[22]);

---

[21]) Vgl. l. c. [20]).

[22]) Wie gefordert, existieren daher die Grenzwerte $u_x(\sigma), \ldots$ und genügen einer L-Bedingung. Vgl. l. c. [21]).

es gilt $|\nu|, |\nu|_k < \bar{\tau}$. Sie wird nun in die Beziehung (69) eingesetzt, die als Bestimmungsgleichung für r_1 aufzufassen ist.

Dieser „Verzweigungsgleichung" für r_1 geben wir noch eine einfachere Gestalt. Ist $M_2(\sigma, \sigma')$ die zu $L_2(\sigma, \sigma')$ gehörige FREDHOLMsche Resolvente, so ergibt sich[23]

$$\int_S \bar{\nu}(\sigma)\, M_2(\sigma, \sigma')\, d\sigma = \bar{\nu}(\sigma') - \bar{\chi}(\sigma'). \tag{82}$$

Weiter erkennt man leicht, daß die Gleichung

$$\nu(\sigma) + \int_S \nu(\sigma')\, L_2(\sigma, \sigma')\, d\sigma' = r_1 \bar{\chi}(\sigma) \tag{83}$$

durch $r_1 \bar{\nu}(\sigma)$ gelöst wird. Somit kann (68) in der Gestalt

$$\nu(\sigma) = r_1 \bar{\nu}(\sigma) - \frac{1}{2\pi} \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_S M_2(\sigma, \sigma')\, \mathfrak{B}\{u(\sigma'), u_x(\sigma'), \ldots\}\, d\sigma' \tag{84}$$

geschrieben werden. Dies in (69) eingesetzt, gibt mit Rücksicht auf (82)

$$\int_S \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}\, d\sigma = 0. \tag{85}$$

Die bereits in (60) als notwendig erkannte Beziehung für $u(\sigma)$ ist also durch geeignete Bestimmung von r_1 zu erfüllen; dabei sind in (85) an Stelle von $u, u_x, \ldots$ die Ausdrücke (63) einzusetzen. Je nach Bauart von $\mathfrak{B}$ zeigt sich dann, ob die Gleichung (85) mehrere, eine oder keine reelle Lösungen besitzt; das Entsprechende gilt für unser Randwertproblem (vgl. die Beispiele unter 4). — Tritt $u(\sigma)$ nicht in $\mathfrak{B}$ auf, so kommt r_1 nicht in (85) vor; diese Gleichung ist dann als Lösbarkeitsbedingung aufzufassen. Ist diese erfüllt, so ist u bis auf eine additive Konstante bestimmt.

2. *Äußeres Problem.* Wir verlangen entsprechend von der gesuchten Funktion Regularität in T_a einschließlich des Unendlichen. Die gesuchte Lösung muß, da unter unseren Annahmen die Normalableitung bei Annäherung an S in eine stetige Wertefolge übergeht, die Gestalt

$$u(x, y, z) = \int_S \nu(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}}\, d\sigma' + N \quad (N \text{ konstant}) \tag{86}$$

haben. Die der Randbedingung (59) entsprechende Integralgleichung lautet daher

$$\nu(\sigma) - \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(\sigma') \frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}\, d\sigma' = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}, \tag{87}$$

[n ist auch hier die in das Innere von T (nicht von T_a) weisende Normale].

Die homogene Integralgleichung besitzt diesmal keine Lösungen; das Verfahren der sukzessiven Approximationen kann also direkt angewendet werden.

---

[23]) Vgl. l. c.[7]), S. 23—24.

Die noch von dem Parameter N abhängige Lösung möge ausführlich $\nu(\sigma; N)$ geschrieben werden. Das mit dieser Belegung gebildete Potential der einfachen Schicht ist dann und nur dann im Unendlichen regulär, wenn die Masse verschwindet. Wir werden demgemäß N aus der Gleichung

$$\int_S \nu(\sigma; N)\, d\sigma = 0 \tag{88}$$

bestimmen. Integrieren wir (87) beiderseits über S und beachten $\int_S \frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}\, d\sigma = -2\pi$, so erkennt man leicht, daß (88) mit

$$\int_S \mathfrak{V}\{u(\sigma),\ u_x(\sigma),\ u_y(\sigma),\ u_z(\sigma)\}\, d\sigma = 0 \tag{89}$$

äquivalent ist. Auch hier wird es wesentlich vom Bau der Funktionaloperation $\mathfrak{V}$ abhängen, ob und wie viele reelle Werte N und somit reelle Lösungen unseres Randwertproblems vorhanden sind. — Tritt $u(\sigma)$ in $\mathfrak{V}$ nicht auf, so kommt N in (89) nicht vor. Ist diese Lösbarkeitsbedingung dann erfüllt, so ist u wieder bis auf eine additive Konstante bestimmt.

3. *Lösungen in der Nachbarschaft der zweiten Randwertaufgabe.* Es sei $f(\sigma)$ eine auf S gegebene stetige, einer L-Bedingung genügende Funktion; überdies sei

$$\int_S f(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{90}$$

Es bezeichne weiter $u_0(x, y, z)$ eine bestimmte in $T+S$ bzw. T_a+S samt ihrer Normalableitung stetige, in T bzw. T_a reguläre Potentialfunktion, für die bei Annäherung an S

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_\sigma = f(\sigma) \tag{91}$$

gilt; $u_0+\mathfrak{R}_0$ ($\mathfrak{R}_0$ beliebig konstant) ist dann bekanntlich die allgemeine Lösung der zweiten Randwertaufgabe[24]).

Die Funktionaloperation $\mathfrak{V}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}$ genüge auf S wieder einer L-Bedingung und sei für beliebig große Werte von $|u(\sigma)|, |u_x(\sigma)|, \ldots, |u_x(\sigma)|_k, \ldots$ erklärt. Ist weiter $\mathfrak{R}^*$ der größte der Absolutbeträge der etwa vorhandenen Wurzeln $\mathfrak{R}_0$ der Gleichung (99) oder einer anderen Beziehung, deren Befriedigung für die Lösung unserer Randwertaufgabe im folgenden sich als notwendig herausstellt[25]), so möge $\mathfrak{V}$ für $|u(\sigma)|$,

---

[24]) Unter unseren Annahmen über $f(\sigma)$ sind auch $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z}$ in $T+S$ stetig und genügen dort einer L-Bedingung. Vgl. l. c.[20]), S. 326.

[25]) Die Reihenfolge der Untersuchung ist also in Wirklichkeit die folgende: Da $\mathfrak{V}$ für beliebige Werte von $u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots$ erklärt ist, steht einer *formalen* Herstellung der genannten Bedingungsgleichungen nichts im Wege. Die Lösungen $\mathfrak{R}_0$ werden alsdann zur Festlegung von $\mathfrak{R}^*$ und also auch von U_1, d. h. des Gültigkeitsbereiches von (92) verwendet. — Sollte keine Bedingungsgleichung zu erfüllen sein, so wird $\mathfrak{R}^*$ beliebig fest angenommen.

$|u_x(\sigma)|, \ldots |u_{xh}(\sigma)|_h, \ldots < U_1$ ($U_1 \geqq \mathrm{Max}\,[|u_0(\sigma)|+\mathfrak{R}^*, |u_{0x}(\sigma)|, \ldots |u_{0xh}(\sigma)|_h, \ldots] + \mathfrak{Q}^*$ mit $\mathfrak{Q}^* > 0$)[36], Ungleichheitsbeziehungen der Form

$$(92)\quad \begin{cases} |\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}|,\ |\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}|_h \leqq A_1(C), \\ |\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma), \bar{u}_x(\sigma), \ldots\}|, \\ |\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}\{\bar{u}(\sigma), \bar{u}_x(\sigma), \ldots\}|_h \leqq B_1(C)\bar{\mathfrak{Q}} \end{cases}$$

befriedigen, unter A_1 und B_1 wieder wie $\bar{A}$ (vgl. I, 1.) beschaffene Funktionen verstanden; für $\bar{u}$ gelte

$$(93)\quad \begin{cases} |\bar{u}(\sigma)|, |\bar{u}_x(\sigma)|, \ldots, |\bar{u}_{xh}(\sigma)|_h, \ldots < U_1, \\ |u(\sigma) - \bar{u}(\sigma)|, |u_x(\sigma) - \bar{u}_x(\sigma)|, \ldots, |u_{xh}(\sigma) - \bar{u}_{xh}(\sigma)|_h, \ldots \leqq \bar{\mathfrak{Q}}. \end{cases}$$

Wir suchen eine in T bzw. T_a reguläre, in $T+S$ bzw. T_a+S samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Potentialfunktion, die bei Annäherung an S der Bedingung

$$(94)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma = f(\sigma) + \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}$$

genügt und die mit $C \to 0$ gegen eine Funktion der Gestalt $u_0 + \mathfrak{R}_0$ konvergiert.

Wir setzen

$$(95)\quad u = u_0 + \mathfrak{R}_0 + u_1$$

und erhalten demgemäß für die unbekannte Funktion u_1 die Randbedingung

$$(96)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_\sigma = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma) + \mathfrak{R}_0, u_{0x}(\sigma), \ldots\} + \mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\}, \\ \mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\} = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma) + \mathfrak{R}_0 + u_1(\sigma), u_{0x}(\sigma) + u_{1x}(\sigma), \ldots\} - \\ \quad - \mathfrak{B}\{u_0(\sigma) + \mathfrak{R}_0, u_{0x}(\sigma), \ldots\}. \end{cases}$$

Dabei ist wegen (92) mit $|u_1(\sigma)|, |u_{1x}(\sigma)|, \ldots, |u_{1xh}(\sigma)_h|, \cdots < \mathfrak{Q} < \mathfrak{Q}^*$, $|u_1(\sigma) - \bar{u}_1(\sigma)|, |u_{1x}(\sigma) - \bar{u}_{1x}(\sigma)|, \ldots, |u_{1xh}(\sigma) - \bar{u}_{1xh}(\sigma)|_h, \cdots \leqq \bar{\mathfrak{Q}}$ ($\bar{u}_1 = \bar{u} - u_0$ eine wie u_1 beschaffene Funktion)

$$(97)\quad \begin{cases} |\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\}|,\ |\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\}|_h \leqq B_1(C)\mathfrak{Q}, \\ |\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}_1\{\bar{u}_1(\sigma), \bar{u}_{1x}(\sigma), \ldots\}|, \\ |\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}_1\{\bar{u}_1(\sigma), \bar{u}_{1x}(\sigma), \ldots\}|_h \leqq B_1(C)\bar{\mathfrak{Q}}. \end{cases}$$

Somit ist das Problem auf den Fall II, 1. bzw. II, 2. zurückgeführt.

Die zu (85) bzw. (89) analoge Gleichung zur Bestimmung der Parameter r_1 bzw. N lautet hier

$$(98)\quad \int_S [\mathfrak{B}\{u_0(\sigma) + \mathfrak{R}_0, u_{0x}(\sigma), \ldots\} + \mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\}]\, d\sigma = 0.$$

Unter unseren Annahmen soll r_1 bzw. N mit C gegen Null konvergieren; diese Parameter kommen aber wegen (92) und (97) in $\mathfrak{B}_1$ nur in Produkten mit anderen „kleinen" Größen vor. Ohne auf eine nähere

---

[36]) $u_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ..., entsprechend später $u_{1x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$, ...

Diskussion von (98) einzugehen, betrachten wir nur den Fall, daß $\frac{\int_S \mathfrak{B}\{u_0(\sigma)+\mathfrak{K}_0, u_{0x}(\sigma),\dots\}\,d\sigma}{\int_S \mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma),\dots\}\,d\sigma}$ bei festgehaltenem r_1 bzw. N für $C\to 0$ nicht gegen Null geht; es muß dann also dafür gesorgt werden, daß

$$\int_S \mathfrak{B}\{u_0(\sigma)+\mathfrak{K}_0, u_{0x}(\sigma),\dots\}\,d\sigma = 0 \tag{99}$$

wird. Um dies zu erreichen, ist, wenn möglich, die noch verfügbare Größe $\mathfrak{K}_0$ in entsprechender Weise zu bestimmen. Je nach Bauart von $\mathfrak{B}$ kann es einen, mehrere oder auch gar keinen reellen Wert $\mathfrak{K}_0$ geben, der (99) erfüllt. Entsprechendes gilt von den Lösungen (98). Tritt $\mathfrak{K}_0$ in (99) nicht auf[27]), so ist in dem hier betrachteten Fall die Aufgabe unlösbar. — Sollte der Integralausdruck in (99) von vornherein für alle $\mathfrak{K}_0$ gleich Null sein, so wird im allgemeinen an Stelle von (99) eine andere Gleichung für $\mathfrak{K}_0$ treten. — Analog liegen die Dinge beim Außenproblem.

4. *Ein spezieller Fall von* 1. Es sei

$$\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma),\dots\} = f(\sigma) + \sum_{m+n+p+q+r\geqq 2} U_{mnpqr}\{u(\sigma), u_x(\sigma),\dots, f\} \tag{100}$$

eine regulär konvergente Integralpotenzreihe in der Bezeichnungsweise von E. Schmidt[28]). Es bezeichnet hierbei U_{mnpqr} einen Integralausdruck der Gestalt

$$U_{mnpqr} = \sum_{j=1}^{k} \int_S \dots \int_S K_{mnpqrj}(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_\varrho)\, u^\alpha u_1^{\alpha_1} \dots u_\varrho^{\alpha_\varrho} u_x^\beta u_{x1}^{\beta_1} \dots u_{x\varrho}^{\beta_\varrho} \times \tag{101}$$
$$\times u_y^\gamma u_{y1}^{\gamma_1} \dots u_{y\varrho}^{\gamma_\varrho} u_z^\delta u_{z1}^{\delta_1} \dots u_{z\varrho}^{\delta_\varrho} f^\eta f_1^{\eta_1} \dots f_\varrho^{\eta_\varrho}\, d\sigma_1 \dots d\sigma_\varrho$$
$$(u = u(\sigma), u_1 = u(\sigma_1), \dots u_x = u_x(\sigma), u_{x1} = u_x(\sigma_1), \dots)$$

mit

$$\begin{cases} \alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_\varrho = m, & \beta+\beta_1+\dots+\beta_\varrho = n, \\ \gamma+\gamma_1+\dots+\gamma_\varrho = p, & \delta+\delta_1+\dots+\delta_\varrho = q, \\ \eta+\eta_1+\dots+\eta_\varrho = r & (\varrho = m+n+p+q+r), \end{cases} \tag{102}$$

unter f und K_{mnpqrj} stetige, einer L-Bedingung genügende Funktionen und unter k die Gesamtzahl der ganzzahligen, nichtnegativen Lösungen der Diophantischen Gleichungen (102) verstanden[29]). Wird ferner

$$\text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{k}\int_S\dots\int_S |K_{mnpqrj}(\sigma,\sigma_1,\dots,\sigma_\varrho)|\,d\sigma_1\dots d\sigma_\varrho,\right. \tag{103}$$
$$\left.\sum_{j=1}^{k}\int_S\dots\int_S |K_{mnpqrj}(\sigma,\sigma_1,\dots,\sigma_\varrho)|_2\,d\sigma_1\dots d\sigma_\varrho\right\} = B_{mnpqr}$$

gesetzt, so soll die Reihe

$$\sum_{m,n,p,p,r}^{1\dots\infty} B_{mnpqr}\, d^{m+n+p+q} d_1^r \tag{104}$$

---

[27]) Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn u selbst in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommt.

[28]) Wir bedienen uns der Schreibweise in l. c. [7]), S. 2.

[29]) Übrigens könnten neben f noch weitere bekannte Funktionen vorkommen.

konvergieren, wobei

$$|u(\sigma)|, |u_n(\sigma)|, \cdots, |u_n(\sigma)|_k, \cdots < d, |f(\sigma)|, |f(\sigma)|_k < d_1 \tag{105}$$

sei.

Setzen wir jetzt

$$f(\sigma) = \varkappa \mathfrak{F}(\sigma), \tag{106}$$

so genügt $\mathfrak{B}$ für genügend kleine Werte des Parameters $\varkappa$ gewiß Ungleichungen der geforderten Art (56) und (58). Beim Innenproblem nimmt die Verzweigungsgleichung (85) für r_1 diesmal die Gestalt

$$A_0 \varkappa + A_{00} \varkappa^2 + A_{01} \varkappa r_1 + A_{11} r_1^2 + \cdots = 0 \tag{107}$$

an [30]).

Erstes Beispiel. Es sei

$K_{000001} = \frac{1}{J_3^2}$, $K_{000011} = \frac{\mathfrak{C}}{J_3^2}$ ($\mathfrak{C}$ konstant), alle übrigen $K_{mnpqrj} = 0$; die Randbedingung lautet daher

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma = f(\sigma) + [u(\sigma)]^2 + \mathfrak{C}[f(\sigma)]^2. \tag{108}$$

Es sei jetzt zur Abkürzung

$$b = \int_S \bar{\nu}(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma'\sigma}} d\sigma', \tag{109}$$

$$a(\sigma) = \int_S \mathfrak{G}(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma'\sigma}} d\sigma' \text{ mit } \mathfrak{G}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathfrak{F}(\sigma) - \int_{\sigma_0} M_0(\sigma, \sigma') \mathfrak{F}(\sigma') d\sigma'\right) \tag{110}$$

gesetzt; bekanntlich ist b eine von Null verschiedene Konstante. Die Bestimmung einiger Koeffizienten in (107) ergibt mit (106) unter Berücksichtigung von (84) und (85)

$$A_0 = \int_S \mathfrak{F}(\sigma) d\sigma, \quad A_{00} = \int_S ([a(\sigma)]^2 + \mathfrak{C}[\mathfrak{F}(\sigma)]^2) d\sigma, \tag{111}$$

$$A_{01} = -2b \int_S a(\sigma) d\sigma, \quad A_{11} = J_3 b^2.$$

Ist nun $\int_S \mathfrak{F}(\sigma) d\sigma \neq 0$, so findet sich

$$r_1^{(1)} = \left(-\frac{A_0}{A_{11}} \varkappa\right)^{1/2} + \cdots, \quad r_1^{(2)} = -\left(-\frac{A_0}{A_{11}} \varkappa\right)^{1/2} + \cdots, \tag{112}$$

und wir erhalten, wenn nur $\varkappa$ hinreichend klein ist, für r_1 und somit [nach Einsetzen in $\nu(\sigma; r_1)$ und (61)] für u zwei Lösungen, die, da alle sonst vorkommenden Funktionen reell sind, reell oder konjugiert komplex ausfallen.

Ist dagegen $\int_S \mathfrak{F}(\sigma) d\sigma = 0$, d. h. $A_0 = 0$, so ergeben sich, falls $D = A_{01}^2 - 4 A_{00} A_{11} \neq 0$ ist, die beiden reellen bzw. konjugiert kom-

[30]) Gleichungen dieser Form ergeben sich allgemein bei der Diskussion des Verzweigungsfalles für nichtlineare Integralgleichungen; die Lösbarkeit wird wesentlich durch die Koefizienten $A_0, A_{00}, \ldots$ bestimmt. Eine eingehende Diskussion einer großen Anzahl von Fällen findet sich l. c. [7]), S. 25 f.

plexen Lösungen

$$(113)\qquad \begin{aligned} r_1^{(1)} &= \frac{1}{2A_{11}}\left(-A_{01}+\sqrt{D}\right)\varkappa+\mathfrak{P}^{(1)}(\varkappa),\\ r_1^{(2)} &= \frac{1}{2A_{11}}\left(-A_{01}-\sqrt{D}\right)\varkappa+\mathfrak{P}^{(2)}(\varkappa),\end{aligned}$$

[$\mathfrak{P}^{(1)}$, $\mathfrak{P}^{(2)}$ Potenzreihen in $\varkappa$, bei denen das absolute und das lineare Glied fehlt]. Für $D=0$ nimmt (107) mit $r_1=-\frac{A_{01}}{2A_{11}}\varkappa+\bar{r}_1$ die Gestalt $\bar{r}_1^2+\cdots=0$ an. Bezeichnet $\mathfrak{A}\varkappa^j$ ($j\geqq 3$) das erste $\bar{r}_1$ nicht enthaltende Glied dieser Entwicklung, so ergibt sich

$$(114)\qquad \bar{r}_1^{(1)}=(-\mathfrak{A}\varkappa^j)^{1/3}+\cdots,\quad \bar{r}_1^{(2)}=-(-\mathfrak{A}\varkappa^j)^{1/3}+\cdots.$$

Wie man leicht erkennt, können wegen

$$(115)\qquad D=4b^3\{(\int_S a(\sigma)\,d\sigma)^3-J_S\int_S[a(\sigma)]^3\,d\sigma-\mathfrak{C}J_S\int_S[\mathfrak{F}(\sigma)]^3\,d\sigma\}$$

bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{C}$ die Fälle $D>0$, $D<0$ und $D=0$ durchaus vorkommen.

Zweites Beispiel. Die Randbedingung laute:

$$(116)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma=f(\sigma)+h(\sigma)\,u(\sigma),$$

d. h. wir haben eine dritte Randwertaufgabe, also ein lineares Problem vor uns.

Es sei $f(\sigma)=f_0(\sigma)+f_1(\sigma)$ ($\int_S f_0(\sigma)\,d\sigma=0$) und $f_1=\varkappa\mathfrak{F}_1$, $h=\varkappa\mathfrak{H}$. Gesucht sind diejenigen Lösungen, die für $\varkappa\to 0$ in $u_0(x,y,z)+\mathfrak{K}_0$ ($\mathfrak{K}_0$ konstant) übergehen, unter u_0 eine spezielle Lösung der Aufgabe $\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_\sigma=f_0(\sigma)$ verstanden. Wir fassen daher die Aufgabe als ein Beispiel zu 3. auf.

Setzen wir wieder

$$(117)\qquad u=u_0+\mathfrak{K}_0+u_1,$$

so hat hier (96) die spezielle Gestalt

$$(118)\qquad \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_\sigma=\varkappa[\mathfrak{F}_1(\sigma)+\mathfrak{H}(\sigma)\,(u_0(\sigma)+\mathfrak{K}_0)]+\varkappa\,\mathfrak{H}(\sigma)\,u_1(\sigma);$$

die Gleichung (98) lautet daher

$$(119)\qquad \varkappa\int_S[\mathfrak{F}_1(\sigma)+\mathfrak{H}(\sigma)\,(u_0(\sigma)+\mathfrak{K}_0)]\,d\sigma+\varkappa r_1 b\int_S\mathfrak{H}(\sigma)\,d\sigma-$$
$$-\varkappa^2\int_S a_1(\sigma)\,\mathfrak{H}(\sigma)\,d\sigma+\cdots=0.$$

Hierbei ist mit $\mathfrak{F}_2(\sigma)=\mathfrak{F}_1(\sigma)+\mathfrak{H}(\sigma)\,(u_0(\sigma)+\mathfrak{K}_0)$

$$(120)\qquad a_1(\sigma)=\int_S\mathfrak{G}_1(\sigma')\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\,d\sigma',\quad \mathfrak{G}_1(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\Big(\mathfrak{F}_2(\sigma)-$$
$$\int_S M_2(\sigma,\sigma')\,\mathfrak{F}_2(\sigma')\,d\sigma'\Big).$$

Hier kann nur dann eine mit $\varkappa$ verschwindende Lösung existieren, wenn der Koeffizient des in $\varkappa$ linearen Gliedes verschwindet. Es sei zunächst $\int_S \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma \neq 0$ und wir setzen

$$\mathfrak{A}_0 = -\frac{\int_S [\mathfrak{F}_1(\sigma) + \mathfrak{H}(\sigma)\, u_0(\sigma)]\, d\sigma}{\int_S \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma}. \tag{121}$$

Dann ist

$$r_1 = \frac{\int_S a_1(\sigma)\, \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma}{b \int_S \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma}\, \varkappa + \cdots. \tag{122}$$

Ist ferner $\int_S \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma = 0$, so sind, falls nicht (119) identisch erfüllt ist,

$$\int_S [\mathfrak{F}_1(\sigma) + \mathfrak{H}(\sigma)\, u_0(\sigma)]\, d\sigma = 0, \quad \int_S a_1(\sigma)\, \mathfrak{H}(\sigma)\, d\sigma = 0 \tag{123}$$

notwendige Bedingungen für die Existenz einer mit $\varkappa$ verschwindenden Lösung, da ja mit Rücksicht auf (118) r_1 nur linear vorkommen kann. Je nach dem Bau von (119) können noch weitere notwendige Bedingungen über $\mathfrak{F}_1(\sigma)$ und $\mathfrak{H}(\sigma)$ hinzukommen.

III. Randbedingungen der Gestalt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\, u(\sigma) = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}.$$

1. *Inneres Problem.* Es sei $h(\sigma)$ eine auf S erklärte stetige, einer L-Bedingung genügende Funktion und es bezeichne wieder $\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\}$ eine auf S stetige, ebenfalls einer L-Bedingung genügende Funktionaloperation über u, u_x, u_y, u_z, die die Ungleichungen (56) und (58) des Kapitels II erfüllen möge.

Wir suchen eine in T reguläre, in $T+S$ samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die bei Annäherung an S der Bedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\, u(\sigma) = \mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), u_y(\sigma), u_z(\sigma)\} \quad (h(\sigma) \not\equiv 0) \tag{124}$$

genügt.

Wir bedienen uns wieder des Ansatzes

$$u(x, y, z) = \int_S \mu(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' r}}\, d\sigma'; \tag{125}$$

ist insbesondere

$$h(\sigma) \leqq 0, \tag{126}$$

so muß eine jede Lösung des Problems die Gestalt (125) haben. Ist (126) nicht erfüllt, so lassen wir etwaige andere Lösungen außer Betracht.

Die Integralgleichung des Problems lautet hier

$$(127)\qquad \mu(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \mu(\sigma')\left(\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma},n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}-h(\sigma)\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\right)d\sigma' = -\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{B}\{u(\sigma),u_x(\sigma),\ldots\}.$$

Hat die zugehörige homogene Integralgleichung

$$(128)\qquad \mu(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_S \mu(\sigma')\left(\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma},n)}{r_{\sigma'\sigma}}-h(\sigma)\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\right)d\sigma' = 0$$

keine Lösung [dieser Fall liegt z. B. vor, wenn (126) erfüllt ist[30a])], so ist, falls die in den Ungleichungen (56) und (58) auftretende positive Konstante C genügend klein ist, das Verfahren der sukzessiven Approximationen ohne weiteres durchführbar und konvergent; überdies ergibt sich die Unität der so erhaltenen Lösung.

Es habe andererseits die Integralgleichung (128) p linear unabhängige Lösungen $\mu_1(\sigma),\ldots\mu_p(\sigma)$, und es mögen $\pi_1(\sigma),\ldots\pi_p(\sigma)$ die entsprechenden Lösungen der zu (128) adjungierten Integralgleichung bezeichnen. Setzen wir wieder gemäß der Methode der Kernzerspaltung

$$(129)\qquad L_2(\sigma,\sigma')=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma},n)}{r^2_{\sigma'\sigma}}-h(\sigma)\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\right)+\pi_1(\sigma)\,\mu_1(\sigma')+\cdots+\pi_p(\sigma)\,\mu_p(\sigma'),$$

so hat die Integralgleichung

$$(130)\qquad \mu(\sigma)+\int_S L_2(\sigma,\sigma')\,\mu(\sigma')\,d\sigma' = 0$$

keine Lösungen mehr.

Wir schreiben nun unter Berücksichtigung von (129) die Integralgleichung (127) in der Gestalt

$$(131)\qquad \mu(\sigma)+\int_S L_2(\sigma,\sigma')\,\mu(\sigma')\,d\sigma' = \sum_{n=1}^{p} r_n\,\pi_n(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{B}\{u(\sigma),u_x(\sigma),\ldots\}$$

mit

$$(132)\qquad r_n=\int_S \mu(\sigma')\,\mu_n(\sigma')\,d\sigma',\qquad (n=1,2,\ldots,p).$$

Die Gleichung (131) ist nun wieder ohne Schwierigkeit für hinreichend kleine Werte von $C, |r_1|,\ldots,|r_p|$ durch sukzessive Approximationen lösbar.

Die Lösung ist auf S stetig und genügt dort einer L-Bedingung[31]). Sie hängt zunächst noch von den unbekannten Parametern $r_1,\ldots,r_p$ ab; diese werden so bestimmt, daß die p „Verzweigungsgleichungen“ (132)

[30a]) Im ebenen Fall hat die zu (128) analoge Gleichung nur dann keine Lösung, wenn es auf S keine Belegung gibt, für die das zugehörige Potential der einfachen Schicht identisch verschwindet.

[31]) In $T+S$ existieren daher u_n, u_β, u_s und genügen dort einer L-Bedingung (vgl [30]).

befriedigt sind. Diese lassen sich, wie man ähnlich wie in Kapitel II zeigen kann, auf die Gestalt

$$\int_S \pi_n(\sigma)\,\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\}\,d\sigma = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots, p) \tag{133}$$

bringen; dabei ist in die in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Funktionen $u(\sigma)$, $u_x(\sigma)$, $u_y(\sigma)$ und $u_z(\sigma)$ [vgl. (63)] für die Belegung $\mu(\sigma)$ die die Parameter $r_1, \ldots, r_p$ enthaltende Lösung von (131) eingesetzt zu denken. Je nach der Bauart von $\mathfrak{B}$ gibt das System (133) Aufschluß über die Existenz bzw. Einzigkeit eines reellen Lösungssystems der r_n und somit des Randwertproblems überhaupt. — Ist insbesondere $\mathfrak{B}$ eine Integralpotenzreihe der Gestalt (100), so besteht das System (133) aus Gleichungen der Form (107), in denen natürlich noch entsprechende Glieder mit $r_2, \ldots, r_p$ vorkommen.

2. *Äußeres Problem.* Wir suchen diesmal eine in T_a (einschließlich des Unendlichen) reguläre, in $T_a + S$ mit ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung von $\Delta u = 0$, die wieder der Randbedingung (124) genügen möge und die wir in der Gestalt

$$u(x, y, z) = \int_S \mu(\sigma')\frac{1}{r_{\sigma' r}}\,d\sigma' + N \tag{134}$$

ansetzen; wie man weiß, muß auch hier im Falle (126) eine jede Lösung diese Gestalt haben (vgl. [32]).

Die entsprechende Integralgleichung lautet

$$\mu(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(\sigma')\left(\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r^2_{\sigma'\sigma}} - h(\sigma)\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\right)d\sigma' = \frac{1}{2\pi}[\mathfrak{B}\{u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots\} - h(\sigma)N]; \tag{135}$$

hierbei weist wieder n in das Innere von T. Man wird auch hier wesentlich die beiden Fälle zu unterscheiden haben, daß die homogene Integralgleichung Lösungen besitzt oder nicht.

Für das folgende setzen wir nunmehr ausdrücklich voraus, daß die dritte Randwertaufgabe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\,u(\sigma) = F(\sigma) \quad (F \text{ auf } S \text{ gegeben und stetig}) \tag{136}$$

auf eine einzige Weise durch eine in T_a einschließlich des Unendlichen reguläre Potentialfunktion lösbar sei, was z. B. im Falle (126) zutrifft[32]). Die zu (135) gehörige homogene Integralgleichung hat daher gewiß keine Lösungen.

Die Lösung μ von (135) hängt diesmal noch von dem im Ansatz (134) eingeführten Parameter N ab, den wir wie in II, 2. dazu ver-

[32]) Zur Lösung der dritten Randwertaufgabe für das Außengebiet vgl. K. Maruhn, Einige Bemerkungen zu den Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Sitz.-Ber. d. Berliner Math. Ges. **40** u. **41**, S. 13—28, insbes. S. 19 ff.

wenden, die geforderte Regularität im Unendlichen herzustellen, d. h. die Gleichung

$$\int_S \mu(\sigma; N)\, d\sigma = 0 \tag{137}$$

zu erfüllen.

Es sei nun $M_s(\sigma, \sigma')$ die zum Kern

$$K(\sigma, \sigma') = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(r_{\sigma'\sigma}, n)}{r_{\sigma'\sigma}} - h(\sigma)\frac{1}{r_{\sigma'\sigma}}\right) \tag{138}$$

gehörige FREDHOLMsche Resolvente. Das in μ enthaltene, bezüglich N lineare Glied lautet demgemäß

$$\frac{1}{2\pi} N\left[-h(\sigma) + \int_S h(\sigma')\, M_s(\sigma, \sigma')\, d\sigma'\right]. \tag{139}$$

Die Bestimmung von N aus (137) ist somit gewiß für hinreichend kleine Werte von C in einer einzigen Weise möglich, wenn

$$\int_S \left[h(\sigma) - \int_S h(\sigma')\, M_s(\sigma, \sigma')\, d\sigma'\right] d\sigma \neq 0 \tag{140}$$

ist. Wir zeigen, daß dies unter unseren Annahmen tatsächlich der Fall ist.

Die Funktion

$$\delta(\sigma) = h(\sigma) - \int_S h(\sigma')\, M_s(\sigma, \sigma')\, d\sigma' \tag{141}$$

ist die Lösung der Integralgleichung

$$\delta(\sigma) + \int K(\sigma, \sigma')\, \delta(\sigma')\, d\sigma' = h(\sigma). \tag{142}$$

Das mit $\delta(\sigma)$ als Belegung gebildete Potential der einfachen Schicht

$$U(x, y, z) = \int_S \delta(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}}\, d\sigma' \tag{143}$$

genügt daher bei Annäherung an S der Bedingung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\, U(\sigma) = 2\pi h(\sigma). \tag{144}$$

Wäre nun der Integralausdruck in (140) gleich Null, d. h. $\int \delta(\sigma)\, d\sigma = 0$, so wäre U eine im Unendlichen reguläre Potentialfunktion, die der Randbedingung (144) genügt. Eine solche Funktion ist $U = 2\pi$; unter unseren Voraussetzungen gibt es keine weitere Lösung der Randwertaufgabe (144). Eine Konstante kann aber bekanntlich nicht in T_a als Potential einer einfachen Belegung dargestellt werden; es ist also (140) erfüllt und somit N aus (137) in einer einzigen Weise bestimmbar.

3. *Lösungen in der Nachbarschaft der dritten Randwertaufgabe.* Die Randbedingung habe die Gestalt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\, u(\sigma) = f(\sigma) + \mathfrak{B}[u(\sigma), u_s(\sigma), \ldots\}^{33}), \tag{145}$$

wobei f und $\mathfrak{B}$ auf S stetig sind und dort eine L-Bedingung befriedigen.

---

[33]) Eine lineare Aufgabe, die sich dieser Klasse einfügt, behandelt SCHUBERT in einer noch unveröffentlichten Arbeit. Dort wird in der Ebene für den Kreis eine

Überdies möge $\mathfrak{B}$ Ungleichungen genügen, die unter geeigneten Beschränkungen für $u(\sigma), u_x(\sigma), \ldots$ zu (92) analog sind. Es sei weiter $u_0(x, y, z)$ die Lösung der dritten Randwertaufgabe

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial u}\right)_\sigma + h(\sigma)\, u_0(\sigma) = f(\sigma), \tag{146}$$

die wir als bekannt ansehen dürfen. Liegt etwa das Innenproblem vor, so setzen wir von dieser Aufgabe voraus, daß sie genau eine Lösung der Form $\int_S \mu_0(\sigma') \frac{1}{r_{\sigma' P}}\, d\sigma'$ besitze. Dies ist gewiß der Fall, wenn die entsprechende homogene Integralgleichung keine Lösung hat. Ist überdies $h(\sigma) \leqq 0$, so ist diese Lösung überhaupt die einzige.

Ist nun wieder

$$u = u_0 + u_1, \tag{147}$$

so lautet die Randbedingung für die unbekannte Potentialfunktion u_1

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_\sigma + h(\sigma)\, u_1(\sigma) = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma), u_{0x}(\sigma), \ldots\} + \mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\}, \tag{148}$$

$$\mathfrak{B}_1\{u_1(\sigma), u_{1x}(\sigma), \ldots\} = \mathfrak{B}\{u_0(\sigma) + u_1(\sigma), u_{0x}(\sigma) + u_{1x}(\sigma), \ldots\} - \mathfrak{B}\{u_0(\sigma), u_{0x}(\sigma), \ldots\}.$$

Wie in Kapitel II erkennt man, daß $\mathfrak{B}_1$ Ungleichungen genügt, die zu (97) analog sind, und daß die vorliegende Aufgabe sowie das entsprechende Außenproblem somit auf die in III, 1. und 2. behandelten Probleme zurückgeführt sind.

Randbedingung der Form $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\vartheta + h(\vartheta)\, u(\vartheta) = f(\vartheta) - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u(\vartheta')}{\partial \vartheta'} K(\vartheta, \vartheta')\, d\vartheta'$ vorgeschrieben; Max $\int_{-\pi}^{\pi} |K(\vartheta, \vartheta')|\, d\vartheta'$ spielt also die Rolle unserer Größe C. Dürfen wie bei SCHUBERT, in Abschwächung unserer Voraussetzungen, die gegebenen Funktionen h, f, K eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten aufweisen, so sind unsere Betrachtungen nicht ohne weiteres anwendbar.

(Eingegangen am 18. März 1944.)

Beweis des Gaußschen Integralsatzes[1]).

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

1. Einleitung.

In der mathematischen Literatur erscheinen immer wieder Beweise des Gaussschen Integralsatzes (neuerdings E. Schmidt [23], Randolph [17], Ridder [19], Reid [18]). Durch diese kann der zweidimensionale Fall $n = 2$ im Großen als erledigt angesehen werden. Diese Arbeit verfolgt nun das Ziel, auch für $n > 2$ zu abschließenden Ergebnissen zu gelangen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall, in dem schon alle wesentlichen Schwierigkeiten enthalten sind. Unsere Beweise bleiben aber auch im Fall eines beliebigen n ungeändert richtig.

Der Satz, den wir beweisen wollen, lautet:

Hauptsatz. *Es sei K ein Gebiet des dreidimensionalen Raumes mit einem endlichen* (dreidimensionalen Lebesgueschen) *Maß. Auf seinem Rand F sei ein Flächenmaß*[2]) *μ definiert. Es existiere weiter fast überall auf F die äußere Normale n. Ist dann $f(x, y, z)$ eine in $K+F$ stetige beschränkte Funktion, für die $f'_z(x, y, z)$ in allen Punkten von K existiert (oder überall in K abgesehen von einer Ausnahmemenge vom endlichen zweidimensionalen Maß) und über K integrierbar ist, so gilt*

$$(1) \qquad \int_K f'_z(x, y, z)\, dK = \int_F f(x, y, z) \cos(n, z)\, d_\mu F.$$

Daraus folgt sofort

$$(1') \qquad \int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dK = \int_F \{f_1 \cos(n, x) + f_2 \cos(n, y) + f_3 \cos(n, z)\}\, d_\mu F,$$

wenn f_1, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ usw. Voraussetzungen genügen, die den oben für f, f'_z gemachten nachgebildet sind. *Darüber hinaus gilt* (1') *auch dann,* (Nr. 8, Satz 4), *wenn* $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}$ *im Innern von K, die Summe*

---

[1]) Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für manche wertvolle Ratschläge bin ich Herrn Prof. E. Kamke zu Dank verpflichtet. — Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

[2]) Definition und Eigenschaften des Maßes, der äußeren Normale und des Flächenintegrals findet der Leser in Nr. 2, 3 und 4.

$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ *dagegen in K selbst integrierbar ist.* Diese Form des Satzes ist in der Potentialtheorie von Bedeutung.

Bisher wurde der Gausssche Integralsatz meistens für viel engere Klassen von Gebieten bewiesen (Lichtenstein [12], Haupt-Aumann [8] S. 178, E. Schmidt [23][3]), vgl. auch Brouwer [1], Franklin [6]). In sehr allgemeiner Form ist der Satz von Schauder (Schauder [22]) bewiesen worden; dieser setzt die Existenz der Normale nicht voraus und ersetzt $\cos(n,z)$ in dem Flächenintegral (1) durch den „Dehnungskoeffizient" $D(X)$ im Punkte X der Fläche F. Dieses $D(X)$ wird wie folgt definiert: Es sei $U_r(X)$ eine r-Umgebung des Punktes X auf der Fläche F, $V_r(X)$ ihre Projektion auf die x,y-Ebene. Wenn μ das Maß auf der Fläche und m das zweidimensionale Lebesguesche Maß auf der x,y-Ebene bedeutet, so ist

$$D(X) = \lim_{r \to 0} \frac{m\, V_r(X)}{\mu\, U_r(X)}.$$

Schauder beweist, daß $D(X)$ fast überall existiert und (1) mit $\pm D(X)$ statt $\cos(n,z)$ richtig ist (wobei das Vorzeichen noch besonders festgelegt wird), wenn der Rand F des Gebiets K normal ist in bezug auf das Maß μ[4]). Er gibt aber keine Kriterien, die nachzuprüfen gestatten, ob eine Menge normal ist oder nicht. Schauder zeigt nur, daß die (im Kleinen) dehnungbeschränkten Flächen in bezug auf eine spezielle Maßdefinition (das Janzen-Maß[5])) normal sind[6]). Damit kehrt Schauder

[3]) Lichtenstein setzt voraus, daß auf dem Rande F *überall* eine stetige Normale existiert. Bei Haupt-Aumann wird angenommen, daß $K+F$ ein dehnungsbeschränktes Bild eines abgeschlossenen Würfels ist. Bei E. Schmidt besteht F aus endlich vielen zweimal stetig differenzierbaren Stücken. Außerdem nehmen Lichtenstein und Haupt-Aumann an, daß f auch außerhalb $K+F$ existiert und gewiße Eigenschaften besitzt. Wilkosz [25] und Maak [13] beweisen zwar auch eine der Formel (1) ähnliche Beziehung, definieren aber die rechte Seite von (1) nicht als ein gewöhnliches Flächenintegral.

[4]) Es sei $\{K\}$ ein System von Kugeln, so daß jeder Punkt $X \in F$ Mittelpunkt von Kugeln K mit beliebig kleinen Radien ist. Wir fragen, ob es möglich ist, aus $\{K\}$ ein höchstens abzählbares System von punktfremden Kugeln auszusondern derart, daß die Menge F bis auf eine Untermenge vom μ-Maß Null von diesem System überdeckt wird. Ist das für ein jedes solches System $\{K\}$ möglich, so heißt F normal. Für ebene Mengen F und das Lebesguesche Maß μ folgt diese Eigenschaft aus dem Vitalischen Überdeckungssatz.

[5]) Zu den verschiedenen Maßdifinitionen vgl. Nöbeling [14], [15], [16].

[6]) Darüber hinaus ist nach Randolph [17] der Rand eines beliebigen einfach zusammenhängenden ebenen Gebiets, wenn dieser ein endliches Carathéodory-Maß hat, normal. Dadurch gelingt es Randolph, den Gaussschen Integralsatz (wenigstens für das Carathéodory-Maß μ) mit $\pm D(X)$ statt $\cos(n,z)$ für *beliebige* einfach zusammenhängende *ebene* Gebiete zu beweisen. In dem Satz von Randolph sind die (späteren) Ergebnisse von Ridder [19] und Reid [18] enthalten. In den beiden letztgenannten Arbeiten wird der Satz für ein Gebiet bewiesen, das durch

wieder zu dem Fall zurück, in dem die Normale fast überall existiert. Auch in der späteren Literatur wurde der Begriff „normal“ nicht aufgeklärt [7]).

Wir wollen deshalb auf die Forderung der Normalität verzichten, dafür aber die Existenz der äußeren Normale fast überall auf F voraussetzen [8]). Weiter braucht bei uns K nicht notwendig beschränkt oder einfach zusammenhängend zu sein.

Da es viele wesentlich verschiedene Definitionen des zweidimensionalen Flächenmaßes gibt [5]), wollen wir von einem beliebigen Maß ausgehen, welches auf dem Rande F definiert ist und gewisse einfache Eigenschaften besitzt (Nr. **3**). In Nr. **4** zeigen wir weiter, daß die gebräuchlichen Maße diese Eigenschaften wirklich besitzen. Sie sind übrigens nicht nur hinreichend für die Richtigkeit der Gaussschen Integralformel, sondern in einem gewissen Sinne auch notwendig (vgl. Nr. **9**).

Was die Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y, z)$ betrifft, so lassen diese sich auch durch andere ersetzen. Grob gesprochen, genügt es anzunehmen, daß $\int_a^b f'_z(x, y, z)\, dz = f(x, y, b) - f(x, y, a)$ für fast alle (x, y) gilt. Manche Autoren verlangen deshalb, daß $f(x, y, z)$ für fast alle (x, y) in z *totalstetig* sein soll; dann genügt es, die Existenz von f'_z fast überall in K vorauszusetzen. Unsere Bedingungen (die in Wirklichkeit etwas weniger allgemein als die oben angegebenen sind) scheinen uns für Anwendungen bequemer zu sein.

Die Beweismethode des Hauptsatzes läßt sich kurz wie folgt beschreiben: Das Gebiet K wird von innen durch gewisse Polygongebiete approximiert. Für diese ist die Beziehung (1) leicht beweisbar. Für das Gebiet K ergibt sie sich dann durch einen Grenzübergang.

2. Die äußere Normale.

Es sei F der Rand des Gebietes K und K' das Außengebiet, d. h. die Gesamtheit der Punkte, die nicht zu $K+F$ gehören; K' braucht nicht zusammenhängend zu sein. Ein Strahl t, der durch den Punkt $X \in F$ geht, heißt ein Tangentialstrahl zu F im Punkte X, wenn es

---

eine rektifizierbare Jordansche Kurve begrenzt ist (der Beweis von Ridder, der eine elegante Idee von Estermann [5] verwendet, zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus). Es sei hier noch erwähnt, daß der Hinweis des Encyklopädieartikels [4] auf eine Arbeit von Montel unzutreffend ist.

[7]) Vgl. Randolph [17], S. 536.

[8]) In der Ebene ist die Existenz der Normale fast überall gesichert, wenn der Rand eine rektifizierbare Jordansche Kurve ist. Es gibt dagegen Flächen mit endlichem Flächeninhalt, für welche die Tangentialebene in keinem Punkte existiert (Saks [20]). Dies ist ein Beispiel für die Schwierigkeiten, die für $n > 2$ im Vergleich zu $n = 2$ entstehen.

eine gegen X konvergente Folge von Punkten $\{X_n\}$ des Randes F gibt, derart, daß die durch die Punkte X, X_n bestimmten Strahlen t_n gegen den Strahl t konvergieren.

Wir sagen weiter, die gerichtete Gerade n, die durch den Punkt $X \in F$ geht, sei die äußere Normale von F im Punkt X, wenn alle Tangentialstrahlen im Punkte X zu n senkrecht sind und wenn es auf n einen Punkt Y vor X und einen Y' nach X gibt, so daß $(Y, X) \subset K$, $(X, Y') \subset K'$ ist, mit anderen Worten wenn n im Punkte X das Gebiet K verläßt und in K' eindringt.

Existiert die äußere Normale, so kommt auch jeder anderen gerichteten Geraden g, die durch X geht und einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ mit n bildet, dieselbe Eigenschaft zu: *Sie verläßt K im Punkte X und dringt in K' ein.* In der Tat, man wähle zwei feste Zahlen α, r mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $r > 0$ beliebig und betrachte die Gesamtheit der Strecken, die den einen Endpunkt in X haben, mit n einen Winkel $\leqq \alpha$ bilden und von der Länge r sind. Für genügend kleines r sind sie sämtlich in K' enthalten. Denn sonst würde es auf diesen Strecken Punkte von $K+F$ geben, die an X beliebig nahe sind, also wegen der Definition von n auch beliebig an X nahe Punkte von F. Man hätte dann aber einen Tangentialstrahl, der mit n einen Winkel $\leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ bildet, und das widerspricht der Definition von n. Daraus folgt auf jeder Geraden g, die mit n einen Winkel $\leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ bildet, die Existenz des Punktes Y' mit den oben verlangten Eigenschaften. Ähnlich für Y.

Die zu n senkrechte Ebene T, die durch X geht, heißt die Tangentialebene. Ist g eine Gerade, die mit n einen spitzen Winkel α bildet, $\bar{g}$ ihr Spiegelbild in bezug auf T, M der ebene Winkel, der durch die positiven Richtungen von g und $\bar{g}$ gebildet ist, so gibt es in M Punkte von K und von K', die beliebig nahe zu X liegen, also auch solche Punkte von F. Berücksichtigt man noch, daß der Winkel α beliebig nahe an $\frac{\pi}{2}$ sein kann, so kommt man zu dem Schluß: *Jeder Strahl, der in der Ebene T liegt und durch X geht, ist ein Tangentialstrahl.*

3. Maß und Integral.

Der Rand F von K ist eine abgeschlossene Menge des Raumes. Wir betrachten den Borelschen Mengenkörper $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(F) = \{B\}$[9]) von F. Wir setzen voraus, daß auf dem Mengenkörper $\mathfrak{B}$ eine Mengen-

[9]) $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(F)$ besteht aus allen Borelschen Untermengen von F und enthält z. B. alle in F abgeschlossenen und offenen Mengen ($O \subset F$ ist in F offen, falls es ein Durchschnitt von F mit einer offenen Raummenge ist). Vgl. Hausdorff [9], S. 177.

funktion μB (die wir ein Maß nennen) definiert ist, die nichtnegative Werte annimmt (insbesondere ist $\mu F < +\infty$) und den nachstehend angegebenen Bedingungen I und II genügt:

I. $$\mu \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n, \text{ falls } B_n B_m = 0 \text{ für } n \neq m \text{ ist.}$$

Hierin ist enthalten, daß $\mu B = 0$ ist für die leere Menge B, daß weiter I auch für endliche Summen gilt und daß $\mu B \leqq \mu B'$ ist, sobald $B \subset B'$. Weiter gilt: Ist $\{B_n\}$ eine monoton fallende (bzw. aufsteigende) Folge von Mengen aus $\mathfrak{B}$ mit dem Durchschnitt (der Summe) B, so ist $\lim_{n\to\infty} \mu B_n = \mu B$. Man kann dann weiter beweisen: Ist $B \in \mathfrak{B}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es eine abgeschlossene Menge $A \in \mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften:

(2) $$A \subset B, \qquad \mu B - \mu A < \varepsilon$$ [10].

Man beachte noch, daß aus I folgt:

$$\mu B = \lim_{r\to\infty} \mu B(r),$$

wo $B(r)$ der Durchschnitt von B mit der abgeschlossenen Kugel mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius r ist. Deshalb darf man in (2) A sogar noch als *beschränkt* annehmen.

Weiter wird stets vorausgesetzt, daß auf F fast überall (im Sinne des Maßes μ) eine äußere Normale existiert.

Es sei jetzt $B \in \mathfrak{B}$, B' die schlichte Projektion von B auf eine beliebige Ebene, die wir uns als die x, y-Ebene denken, mB' das Lebesguesche Maß von B' auf dieser Ebene [11]. Dann soll gelten:

II. *Ist auf B fast überall $0 < \alpha \leqq |\cos(n, z)| \leqq \beta$, so ist*

(3) $$\alpha \mu B \leqq m B' \leqq \beta \mu B.$$

---

[10]) Es sei hier kurz der Beweis von (2) skizziert. Wir definieren zuerst ein äußeres und ein inneres Maß für eine beliebige Untermenge M von F:

(*) $$\mu_i^* M = \sup_{A \subset M} \mu A, \quad \mu_a^* = \inf_{O \supset M} \mu O,$$

wo A (bzw. O) beliebige abgeschlossene (bzw. offene) der Bedingung $A \subset M$ bzw. $O \supset M$ genügende Menge bedeutet. Weiter nennen wir M meßbar mit dem Maße $\mu^* M$, wenn $\mu_i^* M = \mu_a^* M = \mu^* M$ ist. Nach dem oben im Text Gesagten sind insbesondere alle offenen und abgeschlossenen Mengen meßbar (denn z. B. ist eine offene Menge Summe von einer aufsteigenden Folge von abgeschlossenen Mengen), und für solche M gilt $\mu^* M = \mu M$.

Weiter läßt sich für $\mu^* M$ nach bekannten Mustern die Lebesguesche Maßtheorie entwickeln (vgl. z. B. Haupt-Aumann [8], Saks [21]). Es sind also alle Borelschen Mengen $B \in \mathfrak{B}$ in diesem Maß μ^* meßbar und *für das Maß μ^* gilt* (2). Jetzt genügt es zu bemerken, daß aus (*) wegen der Monotonie von μ folgt $\mu_i^* B \leqq \mu B \leqq \mu_a^* B$ für $B \in \mathfrak{B}$, also $\mu B = \mu^* B$.

[11]) B' ist sogar eine Borelsche Menge, vgl. Hausdorff [9], S. 208.

Als Folgerung von (3) haben wir

$$m B' \leqq \mu B. \tag{4}$$

Mit Hilfe des Maßes μ kann man auf die übliche Weise das (LEBESGUE-sche) Integral

$$\int_F \varphi(x, y, z)\, d_\mu F \tag{5}$$

definieren. In diesem Sinne soll auch das Integral F in (1) verstanden werden. Da das Maß μB nur für $B \in \mathfrak{B}$ erklärt ist, muß allerdings vorausgesetzt werden, daß φ eine (B)-meßbare Funktion ist. Wir betrachten weiter nur Integrale mit beschränkten, (B)-meßbaren φ. In diesem Fall ist die Existenz des Integrals (5) gesichert.

4. Nachprüfung der Bedingung II für einige bekannte Maße[12]).

Bisher haben wir ein Maß auf der festen Menge F — dem Rande von K — betrachtet. Jetzt stellen wir uns auf einen anderen Standpunkt. Das zweidimensionale Maß μB, $0 \leqq \mu B \leqq +\infty$, soll nunmehr für alle BORELschen Mengen B des Raumes definiert sein. Dabei soll gelten:

I. $\mu \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n$, falls $B_n B_m = 0$ für $n \neq m$ ist.

III. $m B' \leqq \mu B$,

wenn B' die Projektion von B auf eine Ebene E bedeutet und $m B$, das LEBESGUEsche Maß auf dieser Ebene. Die Maße von GROSS, CARATHÉODORY, HAUSDORFF, KOLMOGOROFF, GILLESPIE, JANZEN genügen diesen Forderungen[13]).

Satz 1. *Für die Maße von* GROSS, CARATHÉODORY, HAUSDORFF, KOLMOGOROFF, GILLESPIE, JANZEN *gilt II, wenn* $\mu F < +\infty$ *ist.*

Für den Beweis brauchen wir den folgenden Satz[14]), der eine Integraldarstellung des Maßes liefert: Es sei $C = \varphi(C')$ die durch

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \qquad (u, v) \in C'$$

---

[12]) Diese Nummer dient nur der Aufklärung der Beziehungen zwischen den bekannten Maßdefinitionen und der Bedingung II. Für den Beweis des Hauptsatzes ist sie entbehrlich.

[13]) Zu den Difinitionen dieser Maße vgl. NÖBELING [14], [15], [16], KOLMOGOROFF [11], sowie die dort angegebene Literatur. Bedingung III folgt leicht aus der Definition der Maße. I folgt daraus, daß sie Maße im Sinne von CARATHÉODORY (CARATHÉODORY [3] SAKS [21], S. 43) sind. Für das JANZEN-Maß ist übrigens III nur dann richtig, wenn E eine der Koordinatenebenen ist.

[14]) Für die KOLMOGOROFFschen Maße KOLMOGOROFF [11], für die übrigen NÖBELING [16].

definierte dehnungsbeschränkte Abbildung[15]) einer Borelschen Menge C' der u, v-Ebene auf die Menge $C \in \mathfrak{B}(F)$.

Es existieren dann fast überall auf C' die partiellen Ableitungen von x, y, z nach u, v. Alle im Satz 1 erwähnten Maße haben sämtlich denselben Wert

$$(6) \qquad \mu C = \int_{C'} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv.$$

Wir beweisen jetzt II (unter der Annahme $\mu F < +\infty$, also auch $\mu B < +\infty$). Der Beweis von II wird erbracht sein, wenn wir diese Eigenschaft für eine spezielle Klasse von Untermengen A von B nachweisen können, die die Menge B dem Maße nach beliebig gut approximieren. Wir bezeichnen weiter mit $X', Y', \ldots$ die Projektionen der Punkte $X, Y, \ldots$ von B auf die x, y-Ebene, mit $\pi(B) = B'$ diese Abbildung selbst.

Für zwei beliebige Punkte $X, Y\,(X \neq Y)$ von B wird gesetzt:

$$\sigma(X, Y) = \varrho(X', Y') : \varrho(X, Y).$$

Man darf annehmen, daß *überall* auf B die Normale n existiert und $|\cos(n, z)| \geqq a > 0$ gilt. Deshalb ist für jedes $X \in B$ und alle $Y \in B$, die genügend nahe an X liegen, $\sigma(X, Y) \geqq \frac{\alpha}{2}$. In der Tat, aus jeder Punktfolge $\{Y_n\}$ mit $Y_n \in B$, $Y_n \to X$ kann man eine Teilfolge $\{Y_{n_i}\}$ aussondern, für die die Sehnen $X Y_{n_i}$ gegen einen Tangentialstrahl t im Punkte X konvergieren. Dann hat man:

$$\sigma(X, Y_{n_i}) = \varrho(X', Y'_{n_i}) : \varrho(X, Y_{n_i}) \to \cos(t, xy) \geqq \cos(T, xy) = |\cos(n, z)| \geqq \alpha,$$

woraus die Behauptung sofort folgt. Man betrachte weiter die Mengen $A_k (k = 1, 2, \ldots)$, die aus den Punkten $X \in B$ bestehen, für die $\sigma(X, Y) \geqq \frac{\alpha}{2}$ gilt für alle $Y \in B$ mit $\varrho(X, Y) < \frac{1}{k}$. Man sieht sofort. daß die A_k abgeschlossen sind[16]), daß $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ und $\sum A_k = B$ ist. Nach der obigen Bemerkung braucht II also nur für die A_k bewiesen zu werden, und diese kann man weiter durch ihre abgeschlossenen beschränkten Untermengen ersetzen (vgl. Nr. 3, (2)). Für eine solche Menge A ist $\sigma(X, Y) \geqq \frac{\alpha}{2}$ für alle $X, Y \in A$ mit $\varrho(X, Y) < a$, wo a eine gewisse positive

[15]) Die eineindeutige Abbildung $C = \varphi(C')$ heißt dehnungsbeschränkt, wenn es eine Konstante M gibt, mit der $\varrho(\varphi(X'), \varphi(Y')) \leqq M \varrho(X', Y')$ für beliebige zwei Punkte X', Y' von C' gilt. $\varrho(X, Y)$ bedeutet dabei die Entfernung der beiden Punkte X, Y.

[16]) Ist $X_n \to X$, $X_n \in A_k$ und ist $\varrho(X, Y) < \frac{1}{k}$ für ein $Y \in B$, $Y \neq X$, so ist auch $Y \neq X_n$ für genügend große n und $\frac{\alpha}{2} \leqq \sigma(X_n, Y) \to \sigma(X, Y)$, also $\sigma(X, Y) \geqq \frac{\alpha}{2}$, $X \in A_k$.

Konstante ist. Dann ist aber $\sigma(X, Y)$ für *alle* $X, Y \in A$ mit $X \neq Y$ nach unten durch eine positive Zahl beschränkt. Sonst würde es nämlich zwei Punktfolgen X_k, $Y_k (k = 1, 2, \ldots)$ aus A geben, für die $\varrho(X_k, Y_k) \geqq a$, $\varrho(X_k', Y_k') \to 0$ ist. Man darf annehmen $X_k \to X$, $Y_k \to Y$, $X, Y \in A$. Dann hätte man $\varrho(X, Y) \geqq a$, $\varrho(X', Y') = 0$ und die Projektion von B auf die x, y-Ebene würde nicht schlicht sein. — Die Abbildung $\pi^{-1}(A') = A$ der Projektion A' von A auf diese letzte Menge ist demnach dehnungsbeschränkt. Es sei $z = \varphi(x, y)$ die auf A' definierte Funktion, die diese Abbildung vermittelt. Wendet man auf diese Abbildung den oben formulierten Satz an, so erhält man

$$\mu A = \int_{A'} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy; \qquad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{7}$$

Berücksichtigt man noch, daß $|\cos(n, z)| = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ist, so entsteht durch eine Abschätzung des Integrals (7) die Beziehung II.

5. Eine Ungleichung.

Es sei B' die Projektion einer Borelschen Menge B auf die x, y-Ebene. Wir definieren $N(x, y) = N^B(x, y)$ für $(x, y) \in B'$ als die Anzahl der Punkte von B, die sich in den Punkt (x, y) projizieren ($N(x, y)$ darf natürlich auch $= +\infty$ sein). Das Maß μ soll den Bedingungen I, III von Nr. 4 und der folgenden Bedingung IV genügen:

IV. *Zu jeder Borelschen Menge B mit $\mu B < +\infty$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (beschränkte) abgeschlossene Menge $A \subset B$, für die gilt*

$$\mu(B - A) < \varepsilon.$$

Diese letzte Eigenschaft haben wir in Nr. 3, Fußnote [10]) als Folgerung von I allein hergeleitet, falls B in einer abgeschlossenen Menge F mit $\mu F < +\infty$ enthalten ist. Aber z. B. für das Carathéodory-Maß gilt IV auch ohne diese Einschränkung, wie man mit Hilfe der bei H. Hahn [7], S. 445—447 angestellten Überlegungen leicht zeigen kann. Unter den Voraussetzungen I, III, IV gilt der

Satz 2[17]). *Die Funktion $N(x, y)$ ist meßbar und es ist*

$$\int_{B'} N(x, y)\, dx\, dy \leqq \mu B. \tag{8}$$

Als Folgerung haben wir: *Ist $\mu B < +\infty$, so ist $N(x, y) < +\infty$ fast überall auf B', mit anderen Worten: Für fast alle $(x, y) \in B'$ schneidet die durch (x, y) gehende senkrechte Gerade B in endlich vielen Punkten.*

Beweis. Wir können $\mu B < +\infty$ annehmen. Es sei n eine feste natürliche Zahl. Ist $(x, y) \in B'$ Projektion von genau k Punkten der Menge B, so setzen wir $N_n(x, y) = N_n^B(x, y) = k$ für $k \leqq n$, $N_n(x, y) = n$ für $k > n$. Die Folge der $N_n^B(x, y)$ ist monoton nicht abnehmend und

[17]) Schauder [22], S. 11. Hier wird ein etwas einfacherer Beweis gegeben.

konvergiert gegen $N^B(x,y)$ für $n \to \infty$. Es genügt also zu beweisen, daß $N_n^B(x,y)$ meßbar ist und daß

$$\int_{B'} N_n(x,y)\,dx\,dy \leqq \mu B$$

gilt. Für $n = 1$ sind die beiden Behauptungen trivialerweise richtig, da $N_1(x,y) = 1$ auf B' ist. Sie werden induktiv in bezug auf n bewiesen. Sie seien für ein gewisses n und beliebige $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mu B < +\infty$ richtig. Wir haben diese Behauptungen für $n+1$ und ein B mit $\mu B < +\infty$ zn beweisen.

Nach IV gibt es eine wachsende Folge von beschränkten abgeschlossenen Mengen $A_p (p = 1,2,\ldots)$ mit $A_p \subset B$, $\mu A_p \to \mu B$. Daher gilt $A \subset B$, $\mu A = \mu B$ für die Menge $A = \sum A_p$. Das Maß der Projektion von $B-A$ auf die (x,y)-Ebene ist daher nach III gleich Null, es ist also $N_{n+1}^A(x,y) = N_{n+1}^B(x,y)$ fast überall auf B'. Ferner ist die Folge $N_{n+1}^{A_p}(x,y)$ für $p = 1,2,\ldots$ nicht abnehmend und es gilt $\lim N_{n+1}^{A_p}(x,y) = N_{n+1}^A(x,y)$. Wären nun unsere Behauptungen für die Funktionen $N_{n+1}^{A_p}(x,y)$ richtig, so würde daraus durch den Grenzübergang $p \to \infty$ auch ihre Richtigkeit für $N_{n+1}^B(x,y)$ folgen. Diese Überlegung zeigt, daß wir unsere Behauptungen nur für $N_{n+1}^B(x,y)$ mit beschränktem abgeschlossenem B zu beweisen haben.

In diesem Fall gibt es auf jeder senkrechten Geraden, die durch einen Punkt $(x,y) \in B'$ geht, stets einen niedrigsten Punkt von B. Die Gesamtheit dieser Punkte moge B_1 heißen[18]). Dann ist offenbar

$$N_{n+1}^B(x,y) = 1 + N_n^{B-B_1}(x,y).$$

Die Funktion N_{n+1}^B ist also meßbar und durch Integration über B' erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

6. Die Meßbarkeit von $\cos(n,z)$.

Wir kehren nun wieder zu der Betrachtung des Randes F von K zurück unter den Voraussetzungen von Nr. 3.

Hilfssatz 1. $\cos(n,z)$ *ist eine* (B)*-meßbare Funktion auf* F.

---

[18]) B_1 ist eine Borelsche Menge. Diese Tatsache folgt aus der folgenden allgemeinen Bemerkung. Es sei B eine beliebige Borelsche Menge des Raumes, die Untermenge einer abgeschlossenen über der x,y-Ebene gelegenen Menge F ist (für beschränkte F kann dies stets durch eine Translation erreicht werden; für den Fall im Text ist übrigens $F = B$), die Borelsche Menge M möge in der x,y-Ebene liegen und von der Projektion von F überdeckt sein. Für jeden Punkt $(x,y) \in M$ existiert auf der durch (x,y) gehenden senkrechten Geraden der niedrigste Punkt $\psi(x,y)$ von F. B_1 möge aus allen solchen Punkten $\psi(x,y)$ von F bestehen, die zugleich B angehören. *Dann ist* B_1 *eine Borelsche Menge.* In der Tat, die Funktion $\psi(x,y)$ ist, wie man leicht sieht, nach oben stetig, also (B)-meßbar. Sie bildet M eineindeutig auf eine Untermenge $F_1 \subset F$ ab, infolgedessen ist F_1 Borelsch (Hausdorff [9], S. 266). Es ist aber $B_1 = BF_1$.

Beweis. Zuerst wollen wir beweisen, daß der Winkel $\alpha(X) \leqq \frac{\pi}{2}$, den die Tangentialebene mit der z-Achse bildet, eine (B)-meßbare Funktion auf F ist. Daraus wird sich die (B)-Meßbarkeit von $|\cos(n, z)|$ ergeben. Es sei a eine beliebige reelle Zahl,

$$B = [\alpha(X) \leqq a]_{X \in F}$$

die Gesamtheit der Punkte $X \in F$, die der Bedingung $\alpha(X) \leqq a$ genügen. Wir definieren für $n = 1, 2, \ldots$ die Mengen B_n der Punkte X durch die folgende Vorschrift: B_n besteht aus allen $X \in F$, für die es eine Sehne XY der Länge $< \frac{1}{n}$ gibt, die mit der z-Achse einen Winkel $< a + \frac{1}{n}$ bildet. Punkte, die genügend nahe an ein solches X gelegen sind, haben auch diese Eigenschaft, deshalb ist B_n in F offen. Wir wollen beweisen, daß $B = \prod B_n$ ist. Für ein $X \in B$ gibt es einen Tangentialstrahl t durch X, der mit der z-Achse einen Winkel $\leqq a$ bildet, t möge die Grenzlage der Sehnen XY_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sein. Für ein beliebiges n und genügend große $k \geqq k(n)$ gilt dann $\varrho(X, Y_k) < \frac{1}{n}$ und außerdem ist der Winkel zwischen X, Y_k und der z-Achse $(XY_k, z) < a + \frac{1}{n}$. Es ist also $X \in B$. Und umgekehrt: Aus $X \in B_n$ folgt die Existenz eines $Y_n \in F$ mit den Eigenschaften $\varrho(X, Y_n) < \frac{1}{n}$, $(XY_n, z) < a + \frac{1}{n}$. Es sei $X \in B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Aus der Folge $\{Y_n\}$ kann man eine Teilfolge $\{Y_{n_i}\}$ aussondern, für welche die Sehnen XY_{n_i} gegen einen Tangentialstrahl t konvergieren. Dann ist $(t, z) \leqq a$ und $X \in B$. Somit gilt $B = \prod B_n$ und es ist deshalb $B \in \mathfrak{B}$. Daraus folgt unmittelbar, daß $\alpha(X)$ (B)-meßbar ist.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Meßbarkeit des Vorzeichens von $\cos(n, z)$ zu beweisen. Wir betrachten die Mengen A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Punkte $X = (x, y, z)$ von F, für welche die (x, y, z) und $\left(x, y, z - \frac{1}{n}\right)$ verbindende Strecke in $K + F$ enthalten ist. Offenbar sind die A_n abgeschlossen. Die Menge $\sum A_n - [\cos(n, z) = 0$ *oder existiert nicht*$]_{X \in F}$ ist genau die Menge, auf der $\cos(n, z) > 0$ ist. Sie ist also eine Borelsche Menge. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

7. Weitere Hilfssätze.

Ist die Funktion $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ stetig, existiert $f'(x)$ für $a < x < b$ oder für alle x mit $a < x < b$ abgesehen von endlich vielen) und ist in (a, b) (L)-integrierbar, so gilt[19])

$$(9) \qquad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

[19]) Vgl. De La Vallée-Poussin [24].

Hilfssatz 2. *Ist M eine beliebige meßbare Menge der x,y-Ebene mit einem endlichen Maß, Z der durch $(x,y)\in M$, $a\leqq z\leqq b$ definierte „Zylinder", $f(X)=f(x,y,z)$ eine in Z stetige Funktion, für die $f_z(x,y,z)$ für $(x,y)\in M$, $a<z<b$ existiert und in Z integrierbar ist, so gilt*

$$(10)\qquad \int_Z f_z\,dZ=\int_M\{f(x,y,b)-f(x,y,a)\}\,dx\,dy=\int_G \pm f(x,y,z)\,dG.$$

Hier bedeutet G die Gesamtheit der beiden Grundflächen des Zylinders Z; auf der oberen Grundfläche ist das Vorzeichen plus, auf der unteren minus zu wählen.

Die Gleichung (10) ergibt sich sofort, wenn man (9), auf die Funktion $f(x,y,z)$ angewandt, über M integriert und links den Fubinischen Satz anwendet. Aus der oben in Klammern angedeuteten Verallgemeinerung der Bedingungen erhält man den

Zusatz. *Die Formel (10) bleibt auch dann bestehen, wenn für fast alle $(x,y)\in M$ die Ableitung f_z für alle z mit $a<z<b$ existiert, abgesehen jedesmal von endlich vielen z.*

Wir betrachten nun eine Funktion $f(X)=f(x,y,z)$, die in $K+F$ definiert ist und die folgende Eigenschaften besitzt:

(A) *$f(X)$ ist in $K+F$ stetig und beschränkt; f_z existiert überall in K, abgesehen von einer Menge vom endlichen zweidimensionalen Maß (für eine Maßdefinition mit Eigenschaften I, III, IV) und ist über K integrierbar.*

Nach Satz 2 sind für solche Funktion die Voraussetzungen des obigen Zusatzes erfüllt. Es ist also für eine Funktion mit den Eigenschaften (A) die Beziehung (10) richtig, sobald Z in K enthalten ist.

Wir wollen das Gebiet K durch Polyeder approximieren. Es sei eine Zerlegung $(\mathfrak{Z})$ des Raumes durch achsenparallele Ebenen in kongruente Würfel gegeben. Unter einem Polyeder P soll weiter stets eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln einer solchen Zerlegung verstanden werden. Mit R wird der Rand des Polyeders P bezeichnet, mit G derjenige Teil von R, der aus Quadraten besteht, die der x,y-Ebene parallel sind. P^ν $(\nu=1,2,\ldots)$ sei das Polyeder, welches aus allen in K enthaltenen Würfeln der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$ durch die Ebenen $x=\frac{k}{2^\nu}$, $y=\frac{l}{2^\nu}$, $z=\frac{m}{2^\nu}$ $(k,l,m=\ldots,-1,0,1,\ldots)$ besteht. Die Polyederfolge $\{P^\nu\}$ hat offenbar die folgenden Eigenschaften: a) die Folge $\{P^\nu\}$ ist monoton wachsend; b) für jedes $\delta>0$ und genügend große ν sind alle Punkte von K, die von F eine Entfernung $\geqq\delta$ haben, in P^ν enthalten.

Auf Grund dieser Eigenschaften der P^ν beweisen wir den

Hilfssatz 3. *Genügt $f(X)$ in K den Bedingungen (A), so ist*

$$(11)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\int_{G^\nu}\pm f(X)\,dG^\nu=\int_R f(X)\cos(n,z)\,dR.$$

Das Vorzeichen im Punkte $X\in G^\nu$ ist dabei positiv zu wählen, wenn

Beweis. Zuerst wollen wir beweisen, daß der Winkel $\alpha(X) \leqq \frac{\pi}{2}$, den die Tangentialebene mit der z-Achse bildet, eine (B)-meßbare Funktion auf F ist. Daraus wird sich die (B)-Meßbarkeit von $|\cos(n,z)|$ ergeben. Es sei a eine beliebige reelle Zahl,

$$B = [\alpha(X) \leqq a]_{X \in F}$$

die Gesamtheit der Punkte $X \in F$, die der Bedingung $\alpha(X) \leqq a$ genügen. Wir definieren für $n = 1, 2, \ldots$ die Mengen B_n der Punkte X durch die folgende Vorschrift: B_n besteht aus allen $X \in F$, für die es eine Sehne XY der Länge $< \frac{1}{n}$ gibt, die mit der z-Achse einen Winkel $< a + \frac{1}{n}$ bildet. Punkte, die genügend nahe an ein solches X gelegen sind, haben auch diese Eigenschaft, deshalb ist B_n in F offen. Wir wollen beweisen, daß $B = \Pi B_n$ ist. Für ein $X \in B$ gibt es einen Tangentialstrahl t durch X, der mit der z-Achse einen Winkel $\leqq a$ bildet. t möge die Grenzlage der Sehnen $XY_k (k = 1, 2, \ldots)$ sein. Für ein beliebiges n und genügend große $k \geqq k(n)$ gilt dann $\varrho(X, Y_k) < \frac{1}{n}$ und außerdem ist der Winkel zwischen X, Y_k und der z-Achse $(XY_k, z) < a + \frac{1}{n}$. Es ist also $X \in B$. Und umgekehrt: Aus $X \in B_n$ folgt die Existenz eines $Y_n \in F$ mit den Eigenschaften $\varrho(X, Y_n) < \frac{1}{n}$, $(XY_n, z) < a + \frac{1}{n}$. Es sei $X \in B_n (n = 1, 2, \ldots)$. Aus der Folge $\{Y_n\}$ kann man eine Teilfolge $\{Y_{n_i}\}$ aussondern, für welche die Sehnen XY_{n_i} gegen einen Tangentialstrahl t konvergieren. Dann ist $(t, z) \leqq a$ und $X \in B$. Somit gilt $B = \Pi B_n$ und es ist deshalb $B \in \mathfrak{B}$. Daraus folgt unmittelbar, daß $\alpha(X)$ (B)-meßbar ist.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Meßbarkeit des Vorzeichens von $\cos(n,z)$ zu beweisen. Wir betrachten die Mengen $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ der Punkte $X = (x, y, z)$ von F, für welche die (x, y, z) und $\left(x, y, z - \frac{1}{n}\right)$ verbindende Strecke in $K + F$ enthalten ist. Offenbar sind die A_n abgeschlossen. Die Menge $\sum A_n - [\cos(n,z) = 0$ *oder existiert nicht*$]_{X \in F}$ ist genau die Menge, auf der $\cos(n,z) > 0$ ist. Sie ist also eine Borelsche Menge. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

7. Weitere Hilfssätze.

Ist die Funktion $f(z)$ für $a \leqq z \leqq b$ stetig, existiert $f'(z)$ für $a < z < b$ oder für alle z mit $a < z < b$ abgesehen von endlich vielen) und ist in $a, b)$ (L)-integrierbar, so gilt [19])

$$(9) \qquad \int_a^b f'(z)\, dz = f(b) - f(a).$$

[19]) Vgl. De La Vallée-Poussin [24].

Hilfssatz 2. *Ist M eine beliebige meßbare Menge der x,y-Ebene mit einem endlichen Maß, Z der durch $(x,y)\in M$, $a\leqq z\leqq b$ definierte „Zylinder", $f(X)=f(x,y,z)$ eine in Z stetige Funktion, für die $f'_z(x,y,z)$ für $(x,y)\in M$, $a<z<b$ existiert und in Z integrierbar ist, so gilt*

$$(10)\quad \int_Z f'_z\,dZ=\int_M\{f(x,y,b)-f(x,y,a)\}\,dx\,dy=\int_G\pm f(x,y,z)\,dG.$$

Hier bedeutet G die Gesamtheit der beiden Grundflächen des Zylinders Z; auf der oberen Grundfläche ist das Vorzeichen plus, auf der unteren minus zu wählen.

Die Gleichung (10) ergibt sich sofort, wenn man (9), auf die Funktion $f(x,y,z)$ angewandt, über M integriert und links den Fubinischen Satz anwendet. Aus der oben in Klammern angedeuteten Verallgemeinerung der Bedingungen erhält man den

Zusatz. *Die Formel* (10) *bleibt auch dann bestehen, wenn für fast alle $(x,y,)\in M$ die Ableitung f'_z für alle z mit $a<z<b$ existiert, abgesehen jedesmal von endlich vielen z.*

Wir betrachten nun eine Funktion $f(X)=f(x,y,z)$, die in $K+F$ definiert ist und die folgende Eigenschaften besitzt:

$$(A)\quad \begin{cases} f(X) \text{ ist in } K+F \text{ stetig und beschränkt; } f'_z \text{ existiert überall in} \\ K, \text{ abgesehen von einer Menge vom endlichen zweidimen-} \\ \text{sionalen Maß (für eine Maßdefinition mit Eigenschaften I, III, IV)} \\ \text{und ist über } K \text{ integrierbar.} \end{cases}$$

Nach Satz 2 sind für solche Funktion die Voraussetzungen des obigen Zusatzes erfüllt. Es ist also für eine Funktion mit den Eigenschaften (A) die Beziehung (10) richtig, sobald Z in K enthalten ist.

Wir wollen das Gebiet K durch Polyeder approximieren. Es sei eine Zerlegung $(\mathfrak{Z})$ des Raumes durch achsenparallele Ebenen in kongruente Würfel gegeben. Unter einem Polyeder P soll weiter stets eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln einer solchen Zerlegung verstanden werden. Mit R wird der Rand des Polyeders P bezeichnet, mit G derjenige Teil von R, der aus Quadraten besteht, die der x,y-Ebene parallel sind. P^ν $(\nu=1,2,\ldots)$ sei das Polyeder, welches aus allen in K enthaltenen Würfeln der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$ durch die Ebenen $x=\frac{k}{2^\nu}$, $y=\frac{l}{2^\nu}$, $z=\frac{m}{2^\nu}$ $(k,l,m=\ldots,-1,0,1,\ldots)$ besteht. Die Polyederfolge $\{P^\nu\}$ hat offenbar die folgenden Eigenschaften: a) die Folge $\{P^\nu\}$ ist monoton wachsend; b) für jedes $\delta>0$ und genügend große ν sind alle Punkte von K, die von F eine Entfernung $\geqq\delta$ haben, in P^ν enthalten.

Auf Grund dieser Eigenschaften der P^ν beweisen wir den

Hilfssatz 3. *Genügt $f(X)$ in K den Bedingungen (A), so ist*

$$(11)\quad \lim_{\nu\to\infty}\int_{G^\nu}\pm f(X)\,dG^\nu=\int_F f(X)\cos(n,z)\,d_\mu F.$$

Das Vorzeichen im Punkte $X\in G^\nu$ ist dabei positiv zu wählen, wenn

X einem Quadrat von G^ν angehört, das P^ν von oben begrenzt, negativ im entgegengesetzten Falle. Man kann also auch schreiben:

$$\int_{G^\nu} \pm f(X)\, dG^\nu = \int_{R^\nu} f(X)\, \cos(n, z)\, dR^\nu.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig; wir zerlegen F in drei disjunkte Mengen: $F = A + B + C$. Zunächst soll dabei B aus denjenigen Punkten $X \in F$ bestehen, in denen $\cos(n, z)$ nicht existiert oder gleich Null ist. Manchen Punkten $X' \in G^\nu$ ordnen wir Punkte $X \in F$ nach der folgenden Vorschrift zu: $X = \varphi(X')$ entspricht X', wenn die offene Strecke (X, X') in $K - P^\nu$ enthalten ist. Entspricht einem $X' \in G^\nu$ kein X in diesem Sinne, so sind nur drei Fälle möglich: entweder trifft der im Punkte X' zu G^ν senkrechter und in bezug auf P^ν nach außen gerichteter Strahl zuerst G^ν und nicht F (d. h. es existiert ein $X'' \in G^\nu$, so daß $(X', X'') \subset K - P^\nu$ ist), oder dieser Strahl hat ein mit R^ν gemeinsames Stück (dann liegt X' auf einer Würfelkante), oder der ganze Strahl ist in $K - P^\nu$ enthalten (was nur bei unbeschränktem K möglich ist). Die zwei letzten Möglichkeiten können nur auf einer Untermenge von G^ν vom Maße Null stattfinden. Sie können daher bei den Abschätzungen des Integrals über G^ν oder deren Teilmengen außer acht gelassen werden.

Die Menge der Punkte X von $F - B$, denen eine „Projektion" in diesem Sinne zukommt, soll mit A^ν bezeichnet werden[20]). Aus der Definition der äußeren Normalen folgt, daß jeder Punkt von $F - B$ für genügend große ν in A^ν enthalten ist. Für die wachsende Folge $\{A^\nu\}$ ist also $\sum A^\nu = F - B$. Es ist deshalb möglich, zwei punktfremde Mengen A und C zu wählen, für die $A + C = F - B$, $\mu C < \varepsilon$ ist und außerdem A eine beschränkte abgeschlossene Untermenge einer Menge A^ν ist. Wir betrachten die Entfernung $\psi_\nu(X)$ des Punktes X von dem zugehörigen Punkt X' auf G^ν. Auf A ist überall $\psi_\nu(X) \to 0$. Ferner ist $\cos(n, z)$ auf A eine (B)-meßbare Funktion (Hilfssatz 1). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $\psi_\nu(X) \to 0$ auf A gleichmäßig gilt und $\cos(n, z)$ stetig ist (sonst würden wir nach den Sätzen von Egoroff und Lusin (vgl. z. B. Saks [21], S. 18 und 72) A durch eine etwas kleinere Menge ersetzen, für die diese Behauptungen gelten und C entsprechend vergrößern).

Wir wählen jetzt $\delta > 0$ so klein, daß der Betrag der Differenz der Werte von $\cos(n, z)$ in zwei Punkten X, Y von A, die voneinander um $\varrho(X, Y) < 4\delta$ entfernt sind, kleiner als ε ausfällt und ferner

$$|f(X) - f(X')| < \varepsilon \text{ für } X, X' \in K + F,\ \varrho(X, X') < 4\delta \tag{12}$$

gilt. Es sei weiter ν_0 so groß, daß $A \subset A^\nu$ für $\nu \geqq \nu_0$ ist (daß also jeder Punkt $X \in A$ eine „Projektion" $X' \in G^\nu$ hat) und daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{1}{2^\nu} < \delta,\ \psi_\nu(X) < \delta \text{ für } \nu \geqq \nu_0,\ X \in A.$$

[20]) Die A^ν sind Borelsche Mengen, vgl. Fußnote [18]).

Unter diesen Voraussetzungen vergleichen wir die in (11) vorkommenden Integrale $\int_F f \cos(n,z)\, dF$ und $\int_G \pm f\, dG$, wobei $G = G^\nu$ ist, also bei G^ν (sowie später bei P^ν) der Index $\nu \geqq \nu_0$ fortgelassen ist. $G_s (s = 1, 2, \ldots, r)$ seien die einzelnen Quadrate, aus denen G aufgebaut ist. A'_s, B'_s, C'_s sollen aus „Projektionen" $\varphi^{-1}(X)$ auf G_s der Punkte X von A, B, C bestehen. A_s, B_s, C_s sollen weiter die Bilder von A'_s, B'_s, C'_s auf F sein [20]). A'_s, B'_s, C'_s sind dann schlichte Projektionen von A_s, B_s, C_s im gewöhnlichen Sinn. Wir haben somit die Zerlegung $G_s = A'_s + B'_s + C'_s + D'_s$ von G_s in punktfremde Summanden, wobei der Rest D'_s genau aus denjenigen Punkten von G_s besteht, in denen die äußere Normale zu G zuerst G und nicht F trifft.

Zuerst soll abgeschätzt werden

$$|\int_{A'_s} \pm f\, dG - \int_{A_s} f \cos(n,z)\, dF|. \tag{13}$$

Das Vorzeichen von $\cos(n,z)$ auf A_s fällt mit dem Vorzeichen $\pm$ im ersten Integral zusammen; (13) ist also gleich

$$|\int_{A'_s} f\, dG - \int_{A_s} f|\cos(n,z)|\, dF|. \tag{14}$$

Wenn wir hier $f(X)$ durch den Wert f_0 in irgend einem Punkt $X' \in A'_s$ ersetzten, machen wir nach (12) einen Fehler $\leqq \varepsilon (m A'_s + \mu A_s) \leqq 2\varepsilon \mu A_s$ (letzteres nach (4)). Hierbei verwandelt sich (14) in

$$|f_0| \cdot |\int_{A'_s} dG - \int_{A_s} |\cos(n,z)\, dF|. \tag{15}$$

Sind α und β der kleinste bzw. der größte Wert von $|\cos(n,z)|$ auf A_s, so ist $\beta - \alpha < \varepsilon$ nach der Wahl von δ. Weiter liegt $\int_{A'_s} dG = m A'_s$ nach II zwischen $\alpha \mu A_s$ und $\beta \mu A_s$. Zwischen denselben Schranken ist nach dem Mittelwertsatz auch das Integral $\int_{A_s} |\cos(n,z)|\, dF$ enthalten. (15) ist demnach, wenn M eine obere Schranke von $|f(X)|$ bezeichnet, nicht größer als

$$|f_0|(\beta \mu A_s - \alpha \mu A_s) \leqq M \varepsilon \mu A_s,$$

und (13) nicht größer als

$$(M+2)\varepsilon \mu A_s.$$

Wenn $A' = \sum_s A_s$ gesetzt wird, gilt mithin

$$|\int_{A'} \pm f\, dG - \int_A f \cos(n,z)\, dF| \leqq (M+2)\varepsilon \mu F. \tag{16}$$

Weiter haben wir

$$|\int_F f \cos(n,z)\, dF - \int_A f \cos(n,z)\, dF| = |\int_{B+C} f \cos(n,z)\, dF| = |\int_C f| \leqq M \mu C < M \varepsilon. \tag{17}$$

Wir wollen nun zeigen, daß auch $\int_G - \int_A$ klein ist. Nach II für ($\beta = 0$) und (4) haben wir

$$\left|\int_{B'_\varrho} \pm f\,dG\right| \leqq M\,m\,B'_\varrho = 0,$$

$$\left|\int_{C'_\varrho} \pm f\,dG\right| \leqq M\,m\,C'_\varrho \leqq M\,\mu\,C_\varrho,$$

also

$$\left|\int_{\Sigma(B'_\varrho + C'_\varrho)} \pm f\,dG\right| \leqq M\,\mu\,C < M\,\varepsilon. \tag{18}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\int_{\Sigma D'_\varrho}$ klein ist. Man sieht sofort, daß die Menge der nichtleeren D'_ϱ in Paare D'_ϱ, D''_ϱ zerfällt, die einander durch äußere Normalen zu G zugeordnet werden. Der Zylinder Z_ϱ mit den Grundflächen D'_ϱ, D''_ϱ liegt in $K - P$, es ist infolgedessen $\sum m\,Z_\varrho \leqq m\,K - m\,P$, also beliebig klein mit $\frac{1}{2^\nu}$. Nach (10) haben wir jetzt für jedes Paar D'_ϱ, D''_ϱ:

$$\left|\int_{D'_\varrho} \pm f\,dG + \int_{D''_\varrho} \pm f\,dG\right| = \left|\int_{D'_\varrho} f\,dG - \int_{D''_\varrho} f\,dG\right| = \left|\int_{Z_\varrho} f'_\varrho\,dK\right|,$$

also

$$\left|\int_{\Sigma D'_\varrho} \pm f\,dG\right| \leqq \int_{\Sigma Z_\varrho} |f'_\varrho|\,dK < \varepsilon \tag{19}$$

für genügend großes ν. Aus (18), (19), (16) folgt jetzt

$$\left|\int_G \pm f\,dG - \int_A f\cos(n,x)\,dF\right| \leqq \left|\int_G - \int_{A'}\right| + \left|\int_{A'} - \int_A\right|$$
$$\leqq (M+1)\,\varepsilon + (M+2)\,\varepsilon\,\mu\,F = M_1\,\varepsilon.$$

Diese Ungleichung und (17) ergeben die Behauptung des Hilfssatzes.

8. Hauptsatz und Anwendungen.

Satz 3 (Hauptsatz). *Genügt $f(X)$ in K den Bedingungen (A), so gilt*

$$\int_K f'_\varrho\,dK = \int_F f\cos(n,x)\,dF. \tag{1}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist die Beziehung (10) für jeden Würfel des Polyeders P^ν richtig; durch Addition erhalten wir, da die Integrale über die im Innern von P^ν gelegenen Quadrate sich gegenseitig aufheben

$$\int_{P^\nu} f'_\varrho\,dK = \int_{G^\nu} \pm f(X)\,dG^\nu. \tag{20}$$

Für das dreidimensionale Maß von $K - P^\nu$ ist $m(K - P^\nu) \to 0$, also $\int_{P^\nu} \to \int_K$. Nach Hilfssatz 3 ist weiter $\int_{G^\nu} \to \int_F$, der Grenzübergang in (20) liefert daher (1).

Für die Anwendungen ist manchmal die folgende Form des Satzes wichtig:

Satz 4. *Es seien die Funktionen* $f_1(X), f_2(X), f_3(X)$ *in* $K+F$ *stetig und beschränkt, die Ableitungen* $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z}$ *überall in* K *vorhanden (oder überall abgesehen von einer Menge vom endlichen zweidimensionalen Maß). Ferner sollen* $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z}$ *in jedem in* K *mit dem Rande enthaltenen Gebiet und* $\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$ *in* K *integrierbar sein. Dann gilt, wenn* μ *das* Carathéodory*-Maß bedeutet,*

$$(21)\qquad \int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dK = \int_F \{f_1\cos(n,x)+f_2\cos(n,y)+ +f_3\cos(n,z)\}\, d_\mu F.$$

Unter dem zweidimensionalen Maß von Carathéodory $\mu M = \mu_c M$ (Carathéodory [2]) einer Menge M im Raum versteht man folgendes. M wird durch endlich oder abzählbar viele[21]) offene konvexe Mengen M_i mit Durchmessern $< \varrho\,(\varrho>0)$ überdeckt. Es sei $d(M_i)$ der zweidimensionale Durchmesser von M_i, d. h. die obere Grenze des Maßes der Projektion von M_i auf alle Ebenen des Raumes. Ist nun λ_ϱ die untere Grenze der Summen $d(M_1)+d(M_2)+\cdots$ für alle Überdeckungen der genannten Art, so existiert $\lim_{\varrho\to 0}\lambda_\varrho = \mu_c M$[22]).

Wir fassen bei der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$ des Raumes durch die Ebenen $x=\frac{k}{2^\nu}$, $y=\frac{l}{2^\nu}$, $z=\frac{m}{2^\nu}$ $(k,l,m=\ldots,-1,0,1,\ldots)$ die Würfel, die mit einer gegebenen konvexen Menge M Punkte gemeinsam haben, zu einem Polyeder P zusammen. Die Oberfläche von P möge R heißen, ihr Flächeninhalt mR. Wie leicht zu sehen, ist mR gleich der doppelten Summe der Flächeninhalte der Projektionen der Menge P auf die drei Koordinatenebenen[23]). Für genügend großes ν unterscheiden sich diese beliebig wenig von den Maßen der Projektionen der Menge M selbst. Da die letzteren $\leqq d(M)$ sind, erhalten wir für großes ν:

$$mR < 7\,\mu_c M.$$

---

[21]) Für eine beschränkte abgeschlossene Menge M kann die Überdeckung immer endlich angenommen werden.

[22]) Für das Maß μ_c sind die Bedingungen I, II, III erfüllt, vgl. Nr. 4.

[23]) Es sei $\mathfrak{W}$ die Gesamtheit der in P enthaltenen Würfel der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$, die sich auf ein festes Quadrat Q_{xy} der x,y-Ebene mit Seitenlänge $\frac{1}{2^\nu}$ projizieren. Aus der Konvexität von M folgt sofort, daß $\mathfrak{W}$ zusammenhängend ist. Mithin ist Q Projektion von genau zwei der x,y-Ebene parallelen Quadrate, die auf dem Rande von P liegen und Q kongruent sind. Die Summierung über alle Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{zx} ergibt unsere Behauptung.

Aus der Definition des Maßes $\mu_c M$ folgt jetzt: Ist F eine abgeschlossene Menge mit $\mu_c F > 0$, so gibt es für genügend großes ν ein Polyeder Γ mit dem Rande Δ, das aus Würfeln der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$ aufgebaut ist, mit den Eigenschaften $F \subset \Gamma$, $m\Delta < 8\mu_c F$. Solche Polyeder Γ können in einer beliebig kleinen Umgebung von F konstruiert werden. Ist speziell F der Rand des Gebiets K, und bedeutet jetzt P die Gesamtheit der in K enthaltenen Würfel der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^\nu)$, die in Γ nicht enthalten sind, so ist der Rand R von P in Δ enthalten und deshalb auch

$$m R < 8\mu_c F.$$

Beweis des Satzes 4. Nach dem eben Gesagten kann eine Folge von Polyedern P^k $(k = 1, 2, \ldots)$ (P^k besteht aus Würfeln der Zerlegung $(\mathfrak{Z}^{\nu_k})$, $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$) konstruiert werden, die folgende Eigenschaften besitzt: a) und b) wie in Nr. 7, und noch c) $m R^k < 8\mu_c F$.

Wir behaupten, daß dann für $f = f_s$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{R^k} f \cos(n, x)\, d R^k = \int_F f \cos(n, x)\, d_\mu F \tag{22}$$

gilt und ähnlich für f_1, f_2. In der Tat, der Beweis des Hilfssatzes 3, der auf Grund der Eigenschaften a), b) geführt wurde, ist auch hier anwendbar. Der einzige Unterschied besteht darin, daß wir nicht mehr von der Integrierbarkeit von f'_s über K Gebrauch machen können, da nur die Integrierbarkeit der Summe vorausgesetzt ist. Wir wollen daher das Integral (19) hier anders abschätzen. Ist h_s die Höhe des Zylinders Z_s, von dem im Hilfssatz 3 die Rede war, so gilt $\sum m Z_s = \frac{1}{2}\sum h_s m D'_s$, wo die Summe über alle D'_s erstreckt ist. Andererseits ist $\sum m Z_s \leqq m(K-P)$ beliebig klein für großes k. Wir können also annehmen

$$\sum h_s m D'_s < \varepsilon\delta \tag{23}$$

(δ hängt nur von ε ab und ist wie in Nr. 7 definiert). Die Zahl s möge von erster bzw. zweiter Art heißen, je nachdem für sie $h_s < \delta$ bzw. $h_s \geqq \delta$ ist. Aus (23) folgt für die Zahlen s der zweiten Art $\sum_{II} m D'_s < \varepsilon$.

Mithin gilt

$$\Big| \sum_{II} \pm \int_{D'_s} f\, dG \Big| \leqq M \sum_{II} m D'_s < M\varepsilon.$$

Für eine Zahl s der ersten Art ist, da nach (12) für einander entsprechende Punkte $X, \bar{X}$ von D'_s und D''_s die Ungleichung $|f(X) - f(\bar{X})| < \varepsilon$ gilt,

$$\Big| \sum_{I} \pm \int_{D'_s} f\, dG \Big| \leqq \sum_I \Big| \int_{D'_s} f\, dG - \int_{D''_s} f\, dG \Big|$$

$$\leqq \varepsilon \sum_I m D'_s \leqq \varepsilon m R < 8\varepsilon\mu_c F.$$

Damit ist (22) bewiesen. Die Behauptung des Satzes folgt jetzt sofort durch Grenzübergang aus

$$\int_{F^k}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dK=\int_{R^k}\{f_1\cos(n,x)+f_2\cos(n,y)+f_3\cos(n,z)\}\,dR^k.$$

Beispiel. Es seien $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ zwei in K definierte Funktionen, die samt ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z}$ in K beschränkt und gleichmäßig stetig sind. Dann existieren auch die stetigen Randwerte von $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z}$, für die wir dieselben Bezeichnungen beibehalten. Existieren nun die Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ in K und sind sie in jedem in K mit dem Rande enthaltenen Gebiet integrierbar, während $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ und Δv in K selbst integrierbar sind, so gilt die Greensche Formel

$$\int_K (u\Delta v - v\Delta u)\,dK$$
$$=\int_F\left\{\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n,x)+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)+\right.$$
$$\left.+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right\}d_\mu F.$$

Insbesondere erhalten wir:
Sind $u(x,y,z)$ und $v(x,y,z)$ zwei in K definierte harmonische Funktionen, die in K mit ihren Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z}$ beschränkt und gleichmäßig stetig sind, so gilt:

$$\int_F\left\{\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n,x)+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)+\right.$$
$$\left.+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right\}d_\mu F = 0.$$

Diese Sätze, die einfache Folgerungen des Satzes 4 sind, spielen eine wichtige Rolle in der Potentialtheorie. Sie wurden bisher (vgl. Kellogg [10], S. 212 ff.) unter zusätzlichen Voraussetzungen über das Gebiet K bewiesen. Man beachte, daß wir keine Voraussetzungen über die Integrierbarkeit von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ über das ganze Gebiet zu machen brauchen. Sie würden jedoch notwendig werden, wenn man den Satz 3 direkt anwenden wollte.

Bemerkung. Wir wollen noch erwähnen, daß das Flächenintegral $\int_G f(x,y,z)\,d_\mu F$ durch ein Doppelintegral ausgedrückt werden kann, wenn $G \subset F$ ein eineindeutiges dehnungsbeschränktes Bild einer Borel-

schen Menge G' der u,v-Ebene ist[24]). Es sei diese Abbildung durch

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v) \tag{24}$$

gegeben. Wenn wir dann unter μ z. B. das CARATHÉODORY-Maß verstehen, so ist nach dem in Nr. 4 zitierten Satz von NÖBELING für jede BORELsche Untermenge B von G

$$\mu B = \int_{B'} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv,$$

wenn B' das Urbild von B bei der Abbildung (24) ist. Die unter dem Integral stehende Quadratwurzel $D(u,v)$ ist eine fast überall auf G' beschränkte Funktion; nach einem bekannten Satz[25]) ist dann für jede über G integrierbare Funktion $f(X)$

$$\int_G f(x,y,z)\, d_\mu F = \int_{G'} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, D(u,v)\, du\, dv. \tag{25}$$

9. Notwendigkeit der Bedingung II.

μ sei wieder ein Maß, das den Bedingungen I und III genügt.

Satz 5. *Gilt die Gausssche Formel* (1) *mit dem Maß* μ, *sogar nur für Gebiete, die durch ein dehnungsbeschränktes Bild der Kugeloberfläche begrenzt sind, so genügt* μ *der Bedingung* II.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 4. *Ist auf einer Menge* B *der Ebene eine reelle Funktion* $\varphi(x)$ *gegeben* (x bedeutet den Punkt der Ebene), *welche die Eigenschaft hat:*

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqq M\varrho(x', x''), \tag{26}$$

so ist es möglich, $\varphi(x)$ *auf die ganze Ebene so fortzusetzen, daß (26) erhalten bleibt.*

Beweis. Hat $\varphi(x)$ auf einer Menge C die Eigenschaft (26), so existiert in jedem Häufungspunkt x_0 von C der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \overline{\varphi}(x_0)$, und die Funktion $\overline{\varphi}(x)$ ist eine Fortsetzung von $\varphi(x)$ auf die abgeschlossene Hülle $\overline{C}$ von C, die (26) erfüllt. Es sei $\{y_n\}$ eine abzählbare Punktmenge, die in der Ebene überall dicht ist. Der Beweis wird erbracht sein, wenn wir φ auf $B + \{y_n\}$ mit Beibehaltung von (26) fortgesetzt haben. Wir wollen zu B zuerst den Punkt $y = y_1$ hinzufügen. Aus (26) folgt für $x', x'' \in B$

$$\begin{aligned} &\varphi(x') - \varphi(x'') \leqq M\{\varrho(x', y) + \varrho(x'', y)\}, \\ &\varphi(x') - M\varrho(x', y) \leqq \varphi(x'') + M\varrho(x'', y). \end{aligned} \tag{27}$$

[24]) Oft kann der Rand F des Gebiets K in endlich viele Stücke dieser Art ohne gemeinsame Punkte zerlegt werden. Das Flächenintegral ist dann Summe von endlich vielen Integralen der Form (25).

[25]) HAUPT-AUMANN [8], S. 145. Der Satz ist dort für das LEBESGUEsche Maß formuliert, ist aber auch für das Maß μ richtig.

Es existiert also eine Zahl α, die zwischen der linken und der rechten Seite von (27) für alle $x', x'' \in B$ enthalten ist. Wir setzen $\varphi(y) = \alpha$. Dann ist

$$\varphi(x') - \varphi(y) \leqq M\varrho(x', y), \qquad \varphi(y) - \varphi(x'') \leqq M\varrho(x'', y),$$

also für $x = x' = x'' \in B$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq M\varrho(x, y).$$

Das ist (26). Zur Abschließung des Beweises füge man zu B sukzessive y_1, y_2 usw. hinzu.

Ein ähnlicher Beweis gilt für jeden metrischen Raum.

Beweis des Satzes 5. Wir beweisen sogar noch etwas mehr. Es sei B eine Borelsche Menge mit $\mu B < +\infty$, $B' = \pi(B)$ sei ihre schlichte Projektion auf die x, y-Ebene. Es existiere auf B fast überall eine Normale n (in Abweichung von der bisherigen Verabredung verstehen wir in dieser Nummer unter einer Normalen jede Gerade, die zu allen Tangentialstrahlen in einem Punkt senkrecht steht und durch diesen Punkt geht). Es sei ferner fast überall auf B

$$0 < \alpha \leqq |\cos(n, z)| \leqq \beta.$$

Dann gilt (3).

Wie in Nr. 4 wird (3) bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß

$$\mu B = \int_{B'} \frac{1}{|\cos(n, z)|}\, dx\, dy \tag{28}$$

gilt, falls die Abbildung $B = \pi^{-1}(B')$ dehnungsbeschränkt ist. Wir dürfen noch B als beschränkt annehmen. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir die Funktion $z = \varphi(x, y)$, welche die Abbildung $B = \pi^{-1}(B')$ vermittelt und auf B' definiert ist. Nach Hilfssatz 4 ist es dann möglich, die Funktion $z = \varphi(x, y)$ auf die ganze x, y-Ebene fortzusetzen mit der Beibehaltung ihrer Dehnungsbeschränktheit. Die zugehörige Fläche, in die B eingebettet ist, wollen wir Φ nennen.

Da B auf Φ durch B enthaltende offene beschränke Mengen nach dem Maß beliebig gut approximierbar ist und diese Mengen Summen von endlich oder abzählbar vielen punktfremden Gebieten (offenen zusammenhängenden Mengen) sind, genügt es, die Beziehung (28) für ein beschränktes Gebiet B zu beweisen. In diesem Falle ist auch B' ein offenes beschränktes Gebiet. Man kann eine wachsende Folge von in B' gelegenen offenen Gebieten Q'_n angeben, die durch Polygone beschränkt sind und gegen B' konvergieren: $\sum Q'_n = B'$. Dann konvergieren auch ihre Urbilder Q_n auf der Fläche F monoton gegen B. Aus $\lim \mu Q_n = \mu B$ folgt dann, daß alles bewiesen ist, wenn es gelingt, (28) für ein solches Gebiet Q mit der Projektion Q' auf die x, y-Ebene nachzuprüfen. Man kann voraussetzen, daß Q ganz oberhalb dieser Ebene liegt. In diesem Fall ist das durch Q, Q' und die entsprechenden senkrechten Strecken begrenztes Gebiet K von der im Satz 5 ver-

langten Art. Es sei noch $f_p(x,y)$ $(p = 1,2,\ldots)$ eine Folge von Funktionen, die in Q' stetig sind und für die gilt $\frac{1}{\beta} \leqq f_p(x,y) \leqq \frac{1}{\alpha}$, $\lim_{p\to\infty} f_p(x,y) = 1 : |\cos(n,z)|$ fast überall in Q'. Wendet man (1) auf das Gebiet K und die Funktionen $f_p(x,y)$ statt $f(x,y,z)$ an, so erhält man

$$\int_Q f_p(x,y)\,|\cos(n,z)|\,dQ = \int_{Q'} f_p(x,y)\,dx\,dy.$$

Daraus folgt durch Grenzübergang $p \to \infty$:

$$\mu Q = \int_{Q'} \frac{1}{|\cos(n,z)|}\,dx\,dy,$$

womit der Satz erwiesen ist.

(Eingegangen am 12. Juni 1944.)

Literaturverzeichnis.

L. E. J. Brouwer.

[1] Opmerking over meevoudige integralen. Akad. Amsterdam Verslag 28 (1919), S. 116—120.

C. Carathéodory.

[2] Über das lineare Maß von Punktmengen, Nachrichten Göttingen 1914, S. 404—426.

[3] Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, 2. Aufl., (1927), S. 238.

Encyklopädie der mathem. Wissenschaften.

[4] Band II (III) 2, 9. Leipzig (1923—1927), S. 1120—1121.

T. Estermann.

[5] Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz, Math. Zeitschrift 37 (1933), S. 556—560.

Ph. Franklin.

[6] Multiple integrals in n-space. Annals of Math. (2) 24 (1923), S. 213—226.

H. Hahn.

[7] Theorie der reellen Funktionen, Leipzig 1921.

O. Haupt-G. Aumann.

[8] Differential- und Integralrechnung, Berlin und Leipzig 1938, Bd. 3.

F. Hausdorff.

[9] Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1935.

O. D. Kellogg.

[10] Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929.

A. Kolmogoroff.

[11] Beiträge zur Maßtheorie, Math. Annalen 107 (1933), S. 351—366.

L. Lichtenstein.

[12] Über die Greensche Integralformel der Potentialtheorie, Archiv Math. Phys. (3) 27 (1918), S. 31—37.

W. Maak.
[13] Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume, Math. Annalen 116 (1939), S. 574—597.
G. Nöbeling.
[14] Über die Länge der Euklidischen Kontinuen I. Jahresber. DMV 52 (1942), S. 132—160.
[15] Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum, Math. Annalen 118 (1943), S. 687—701.
[16] Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen, Math. Zeitschrift 48 (1943), S. 747—771.
J. F. Randolph.
[17] Caratheodory measure and a generalization of the Gauss-Green lemma. Transactions Americ. Math. Soc. 38 (1935), S. 531—548.
W. T. Reid.
[18] Green's lemma and related results, Americ. Journ. Math. 63 (1941), S. 563—574.
J. Ridder.
[19] Über den Greenschen Satz in der Ebene, Nieuw. Archief Wisk. (2) 21 (1941), S. 28—32.
S. Saks.
[20] On the surfaces without tangent planes, Annals of Math. (2) 34 (1933), S. 114—124.
[21] Theory of the integral. Warschau 1937.
J. Schauder.
[22] The theory of surface measure. Fundamenta Math. 8 (1926), S. 1—48.
E. Schmidt.
[23] Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Zeitschrift 44 (1939), S. 689—788, insbes. S. 709—768.
Ch. J. de la Vallée-Poussin.
[24] Cours d'Analyse, tome I, Louvain-Paris (1909), S. 263.
W. Wilkosz.
[25] Über den verallgemeinerten Fluß-Divergenz-Satz Prace mat-fiz. 44 (1936), S. 109—131.

Anmerkung bei der Korrektur. Dem Gaussschen Integralsatz ist auch die Arbeit von H. Federer, The Gauss-Green theorem, Transactions Americ. Math. Soc. 58 (1945), 44—76 gewidmet; sie war uns bisher nicht zugänglich.

Bemerkungen über eine spezielle Abelsche Gruppe.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Die von vier Basiselementen zweiter Ordnung A, B, C, D erzeugte Abelsche Gruppe besteht aus den Elementen

(1) $$1, A, B, C, ABC, D, ABD, ACD, BCD, ABCD, CD, BD, AD, BC, AC, AB.$$

Im Zusammenhang mit dieser Reihenfolge werden zwei Sätze über Produkte von 3 bzw. 5 paarweise verschiedenen Elementen bewiesen. Der zweite Satz findet Anwendung auf ein mathematisches Spiel.

Die Anordnung (1) wird als

$$1 < A < \cdots < AB$$

gedeutet. Sie gestattet die Aufstellung folgender Tabelle, die zu jedem Element $x \neq 1$ die acht Elemente g mit

$$g < gx$$

angibt.

(2)

A	1,	B,	C,	ABC,	D,	ABD,	ACD, BCD
B	1,	A,	C,	ABC,	D,	ABD,	ACD, BCD
C	1,	A,	B,	ABC,	D,	ABD,	ACD, BCD
ABC	1,	A,	B,	C,	D,	ABD,	ACD, BCD
D	1,	A,	B,	C,	ABC,	ABD,	ACD, BCD
ABD	1,	A,	B,	C,	ABC,	D,	ACD, BCD
ACD	1,	A,	B,	C,	ABC,	D,	ABD, BCD
BCD	1,	A,	B,	C,	ABC,	D,	ABD, ACD
$ABCD$	1,	A,	B,	C,	ABC,	$\underline{CD}$,	$\underline{BD}$, $\underline{AD}$
CD	1,	A,	B,	C,	ABC,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{BD}$, $\underline{AD}$
BD	1,	A,	B,	C,	ABC,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{CD}$, $\underline{AD}$
AD	1,	A,	B,	C,	ABC,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{CD}$, $\underline{BD}$
BC	1,	A,	B,	D,	ABD,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{CD}$, $\underline{AC}$
AC	1,	A,	B,	D,	ABD,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{CD}$, $\underline{BC}$
AB	1,	A,	C,	D,	ACD,	$\underline{ABCD}$,	$\underline{BD}$, $\underline{BC}$.

Leicht festzustellen ist die Richtigkeit der Aussagen:

I. Das Produkt der acht zu x gehörigen Elemente ist stets gleich x.

II. Enthält eine Zeile der rechten Spalte von (2) ein Produkt von 2 oder 4 Basiselementen, so stehen dort genau drei solche Produkte und diese stimmen in einem Basiselement, nämlich dem unterstrichenen, überein, das in keinem der fünf übrigen Elemente vorkommt.

Aus II folgt

III. Kein Produkt aus 3 paarweis verschiedenen Elementen einer Zeile der rechten Spalte von (2) hat den Wert 1.

Denn ein solches Produkt mit dem Wert 1 müßte im ganzen eine gerade Anzahl von Basiselementen enthalten, also, da 1 nicht Faktor sein kann, mindestens einen Faktor mit 2 oder 4 Basiselementen, von denen eins unterstrichen ist. Weil das unterstrichene Basiselement doppelt vorkommen muß, besteht noch ein zweiter Faktor aus 2 oder 4 Basiselementen, folglich auch der dritte. Dann aber tritt das unterstrichene Element dreimal auf. — Zur Abkürzung bezeichne P_n ein Produkt von n paarweis verschiedenen Elementen der Gruppe, und P'_n ein ebensolches Produkt, das durch Verminderung eines Faktors aus P_n hervorgeht, in den übrigen $n-1$ Faktoren also mit P_n übereinstimmt. Nicht zu jedem P_n gibt es ein P'_n, z. B. zu $P_3 \equiv B \cdot 1 \cdot A$ kein P'_3.

Satz 1. *Zu jedem P_3 mit $P_3 = 1$ und jedem $x \neq 1$ existiert ein P'_3 mit $P'_3 = x$.*

Beweis. Ist erstens

$$P_3 \equiv x \cdot g_2 \cdot g_3 = 1,$$

so leistet

$$P'_3 \equiv 1 \cdot g_2 \cdot g_3 = x$$

das Verlangte, da 1 nicht Faktor eines P_3 vom Werte 1 sein kann.

Es sei also zweitens

$$P_3 \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = 1, \quad g_i \neq x \qquad (i = 1,2,3). \tag{3}$$

Die Produkte

$$(g_1 x) \cdot g_2 \cdot g_3,\ g_1 \cdot (g_2 x) \cdot g_3,\ g_1 \cdot g_2 \cdot (g_3 x)$$

mit dem Wert x bestehen jedenfalls aus paarweis verschiedenen Faktoren denn etwa

$$g_1 x = g_2,$$

also

$$x = g_1 g_2 = g_3$$

widerspricht (3).

Wäre Satz 1 falsch, so gäbe es Elemente g_1, g_2, g_3, x, für die außer (3) noch

$$g_i < g_i x \qquad (i = 1,2,3)$$

gilt. Diese g_i müßten daher unter den zu x gehörigen Elementen von (2) vorkommen, im Gegensatz zu III.

Satz 2. *Zu jedem $P_3 \neq 1$ gibt es ein*

$$P'_3 \text{ mit } P'_3 = 1.$$

Beweis. Ist

$$P_5 \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_5 = x \neq 1 \tag{4}$$

und

$$g_i < g_i x \qquad (i = 1, \ldots, 5),$$

so entstammen alle g_i den acht zu x gehörigen Elementen der Tabelle. Wegen I und (4) hätte dann das Produkt der drei übrigen Elemente den Wert 1 im Widerspruch zu III.

Es sei also etwa

$$g_1 x < g_1.$$

Das Produkt

$$(g_1 x) \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_5$$

ist nun entweder das gesuchte P_5' oder es hat zwei gleiche Faktoren, z. B. $g_1 x$ und g_2. Im letzten Fall gilt

$$x = g_1 g_2 \tag{5}$$

und wegen (4)

$$P_3 \equiv g_3 \cdot g_4 \cdot g_5 = 1.$$

Nach Satz 1 ist dann bei geeigneter Wahl der Bezeichnung

$$P_5' \equiv (g_3 x) \cdot g_4 \cdot g_5 = x.$$

Dies liefert in

$$P_5' \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot (g_3 x) \cdot g_4 \cdot g_5 = 1$$

das gewünschte Produkt, weil beispielsweise aus

$$g_1 = g_3 x,$$

d. h.

$$x = g_1 g_3,$$

nach (5)

$$g_2 = g_3$$

folgt, gegen die Definition von P_5. —

Von den 16, mit den Zahlen 1 bis 16 fortlaufend numerierten Feldern einer geraden Felderreihe seien fünf mit je einem Spielstein besetzt. Zwei Personen ziehen abwechselnd, indem sie jedesmal einen beliebigen Spielstein auf irgendein unbesetztes Feld mit niedrigerer Nummer rücken. Zuletzt sind die Felder 1 bis 5 besetzt. Wer diese Stellung herbeiführt, ist Sieger.

Wie muß man in einer gegebenen Stellung ziehen, um zu gewinnen?

Man ordne den Feldern die Gruppenelemente (1) zu und jeder Stellung das entsprechende Produkt P_5. Ist nun $P_5 \neq 1$, so bildet der nach Satz 2 stets mögliche Übergang zu einem $P_5' = 1$ einen erlaubten Zug. Jeder Zug des Gegners erzeugt dann notwendig ein neues $P_5 \neq 1$. Wer fortgesetzt den Produktwert 1 erreicht, siegt; denn zuletzt ist $P_5 \equiv 1 \cdot A \cdot B \cdot C \cdot ABC = 1$. In jeder Stellung mit $P_5 = 1$ verliert der Anziehende.

(Eingegangen am 29. Dezember 1943.)